МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2003
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2003
Proceedings of the Thirty Second Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Sunny Beach, April 5–8, 2003

СВЪРЗВАЩ ЕЛЕМЕНТ

Здравко В. Лалчев, Ирина З. Вутова

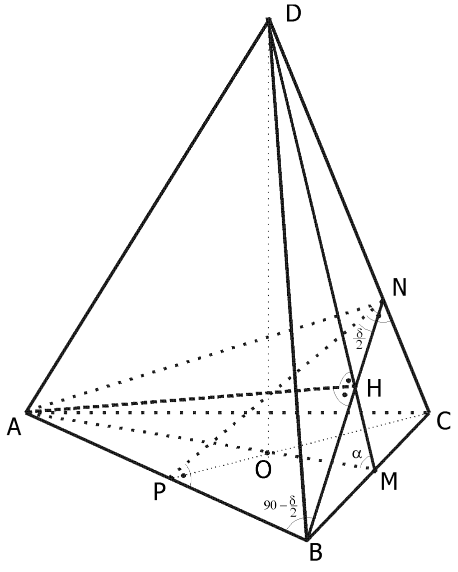
В настоящето съобщение на основата на конкретни задачи от училищния курс по геометрия се обсъжда една идея за търсене на решение на задача. Най- общо казано идеята се състои в откриване на помощен елемент, който да послужи за свързване на условието със заключението на задачата.

1. Предварителни бележки. От гледна точка на решаващия, нерешените задачи (от училищната математика) могат да бъдат разделени на две групи. Към първата група се отнасят задачи за които, решаващият има идея за решението, или казано метафорично, „пътят от условието до заключението на задачата се вижда“. В случая, за да бъде решена задача от първата група, остава само това – пътят да бъде извървян. Към втората група задачи се отнасят задачи за които, решаващият все още няма идея за решението. В този случай, за да бъде решена задачата, е необходимо да бъдат извършени две умствени действия – намиране на пътя, който води от условието до заключението (идея за решението), и извървяване на пътя (реализиране на решението). В настоящето съобщение ще свава дума за задачи от втората група и по конкретно за една възможност за конструиране на „междинни станции“ по пътя на решението при някои задачи от училищния курс по математика. При решаване на задачи от втората група често пъти е възможно да се намери „междинна станция“, от която „се вижда“ както условието, така и заключението на задачата. Ролята на „междинната станция“ може да бъде изиграна от различни математически обекти, конструирани допълнително за целите на решението на поставената задача. Нека обектите с подобно предназначение наречем **свързващи елементи**. Ролята на свързващи елементи могат да играят геометрични обекти като отсечка, ъгъл, триъгълник, векторна база и други в това число и специални геометрични конструкции. Също така роля на свързващи елементи могат да играят и алгебрични обекти, като израз, уравнение, система от уравнения и други. Обикновено свързващите елементи не участват явно нито в условието на задачата, нито в нейното заключение и при реализиране на идеята за свързващия елемент възникват редица въпроси. Например. Какъв обект за свързване да бъде търсен? Как да бъде въведен? След като е въведен свързващия елемент и връзката е осъществена, как той да бъде елиминиран? Някои бележки по този повод ще бъдат изложени по долу.

2. Свързваща отсечка. Идеята за **свързваща отсечка** ще представим, чрез коментар и решение на задача за намиране на връзка между два ъгъла в правилна пирамида. Нека формулираме конкретна

Задача 1. *Дадена е правилана триъгълна пирамида, за която α е ъгълът между околна стена и основата, а δ е ъгълът между две съседни околни стени. Да се изрази δ чрез α.*

Търсене на решение. Ясно е, че ъгълът α е съществен елемент от условието на задачата, а ъгълът δ е съществен елемент от заключението на здачата. Известно е, че при решаване на геометрични задачи удобно е разглежданите ъгли да бъдат свързани с триъгълници. Ето защо можем да построим триъгълник, (свързан с основните елементи на пирамидата), в който ъгълът α (или ъгъл, чиято връзка с α е известна) е ъгъл на построения триъгълник. Това действие може да се интерпретира като „преобразуване“ на условието. Излизайки от аналогични съображения можем да построим триъгълник, (свързан с основните елементи на пирамидата), така че ъгълът δ (или ъгъл, чиято връзка с δ е известна) да бъде ъгъл на построения триъгълник. Това действие може да се интерпетира като „преобразуване“ на заключението. Ако се окаже, че така построените триъгълници имат общи (или елементи, чиято връзка между тях е известна), то тези елементи биха могли да играят свързваща роля между дадения и търсения ъгъл. Ако се окаже, че връзката между първоначално построените триъгълници не е известна (за решаващия), то би могло да се потърси друга двойка триъгълници за тази цел. За предпочитане е триъгълниците не само да бъдат свързани с основните елементи на пирамидата, но и да бъдат специални, например – правоъгълни. Естествено е евентуалната връзка (например, обща страна) да бъде намерена върху пресечницата на равнините, определени от триъгълниците, съдържащи ъглите.



На чертежа е изобразена правилна триъгълна пирамида с основа ABC и връх D. Точката M е средата на основния ръб BC. Точката N е върху ръба CD, така че равнината (ABN) е перпендикулярна на ръба DC. Тогава $\sphericalangle AMD = \alpha$ и $\sphericalangle ANB = \delta$.

И така, α (от условието на задачата) е ъгъл на ΔAMD, а δ (от заключението на задачата) е ъгъл на ΔANB. Двата триъгълника, разглеждани като равнинни фигури имат обща **отсечка** AH, където точката H е общата точка на отсечките BN и DM. Тъй като правата AH е пресечница на две равнини (AMD) и (ABN), които поотделно са перпендикулярни на равнината (BCD), то е перпендикулярна на (BCD). От друга страна, отсечката AH е обща страна за правоъгълните триъгълници AHM (с прав ъгъл при точката H) и AHB (с прав ъгъл при точката H). Последните триъгълници са интересни с това, че в ΔAMH участва ъгъл α, а в ΔABH участва ъгъл $90^\circ - \dfrac{\delta}{2}$. Също така, страната AM на ΔAMH и страната AB на ΔABH са съответно височина и страна на равностранния триъгълник ABC – основата на пирамидата.

След тези разсъждения, за да решим задачата, достатъчно е да означим основния ръб на пирамидата, (например с a) и да изразим отсечката AH един път чрез α и a (от ΔAMH) и след това да изразим втори път същата отсечка AH чрез δ и a (от ΔABH). След приравняване на двата израза за отсечката AH се осъществява връзка между ъглите α и δ и като междувременно се елиминира параметъра a.

Решение.

В ΔAMH $\dfrac{AH}{AM} = \sin\alpha$, т.е. $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$.

В ΔABH $\dfrac{AH}{AB} = \sin(90^0 - \dfrac{\delta}{2})$, т.е. $AH = a\cos\dfrac{\delta}{2}$.

Следователно, $\cos\dfrac{\delta}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$.

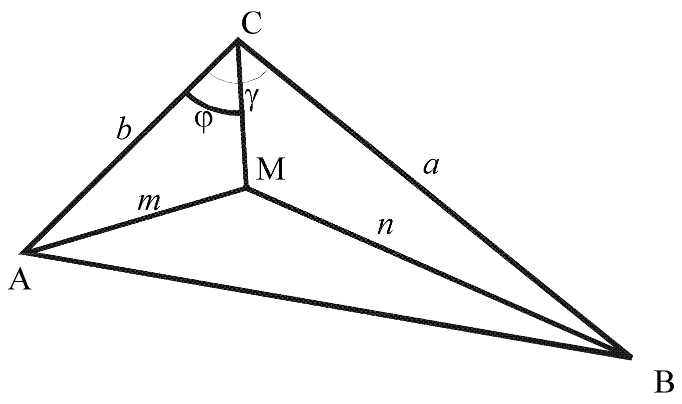
3. Свързащ ъгъл. Идеята за **свързващ ъгъл** ще представим чрез коментар и решение на задача за намиране на разстоянието от точка в равнината на даден триъгълник до един от върховете на триъгълника по дадени разстояния от точката до другите два върха на триъгълника. Нека формулираме конкретна

Задача 2. *Даден е триъгълник ABC, за който $AC = 5$, $BC = 10$, и $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ и точка M е от равнината на триъгълника. Разстоянията от M до точките и B са съответно 4 и 8. Да се намери разстоянието от M до върха C.*

Търсене на решение. За краткост, да означим с x разстоянието от точката M до връх C. Тогава отсечките $AC = b$ $(= 5)$, $BC = a$ $(= 10)$, $AM = m$ $(= 4)$ и $BM = n$ $(= 8)$ и ъгълът $ACB = \gamma$ $(= 90^\circ)$ са съществени елементи от условието на задачата, а отсечката $MC = x$ е съществен елемент на заключението на задачата. На чертежа, на който е изобразен триъгълник ABC и точка M, не е трудно да се забележи, че чрез ΔAMC би могло да се осъществи евентуална връзка между отсечката x (заключението) и отсечките AC и AM, (които са част от условието на задачата). Но само тази връзка не е „достатъчна“ за изразяване на x чрез дадените елементи, тъй като за ΔAMB са известни само две страни (AC и AM). Също така, не е трудно да се забележи, че чрез ΔBMC би могло да се осъществи евентуална връзка между отсечката x и отсечките BC и BM. Но и тази връзка не е „достатъчна“ за изразяване на x чрез дадените елементи, тъй като за ΔCMB са известни само две страни (BC и BM).

Следователно двата опита за „преобразуване“ на заключението с цел неговото непосредствено свързване с условието на задачата, разглеждани по отделно (сами за себе си) не водят до решение на задачата. Но ако в двата триъгълника, използвани съответно при двете „преобразувания“, бъдат включени и ъглите ACM и BCM, (при общия връх C), то между разглежданите триъгълници се очертава връзка, тъй като ъглите ACM и BCM се допълват до ъгъла $C = \gamma$. Ако означим $\sphericalangle ACM$ с φ, то $\sphericalangle BCM = |\gamma - \varphi|$ (или $\gamma + \varphi$). Така ъгълът φ може да играе ролята на свързващ елемент между триъгълниците ACM и BCM. Тъй като въпросните триъгълници, от своя страна са „във връзка“ с условието и заключението, то ъгълът φ би могъл да играе роля на свързващ елемент между условието и заключението.

Решение. Прилагаме косинусовата теорема за $\triangle AMC$ и $\triangle BMC$ и така достигаме до $cos\varphi = \dfrac{5^2 + x^2 - 4^2}{2.5x}$, т.е. $\cos\varphi = \dfrac{9 + x^2}{10x}$ и $\cos(90^\circ - \varphi) = \dfrac{10^2 + x^2 - 8^2}{2.10x}$, т.е. $\sin\varphi = \dfrac{36 + x^2}{20x}$.



От $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ следва, че $5x^4 - 256x^2 + 1620 = 0$.

Следователно $x = \sqrt{\dfrac{128 + 2\sqrt{2071}}{5}}$ или $x = \sqrt{\dfrac{128 - 2\sqrt{2071}}{5}}$.

4. Свързващ израз Идеята за свързващ израз ще представим чрез коментар и решение на следната

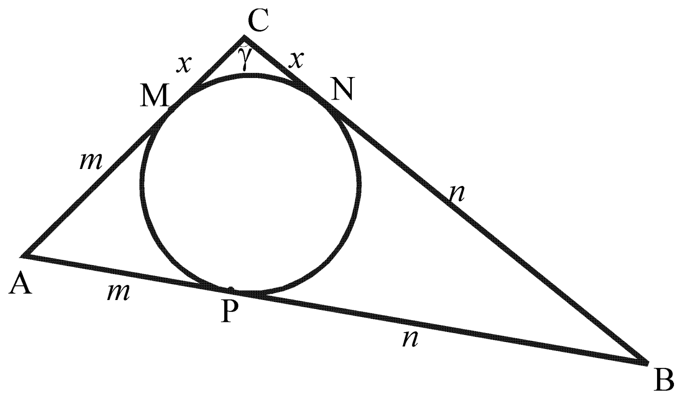
Задача 3. *В триъгълник ABC с лице S вписаната окръжност се допира до страната AB в точката P. Дадени са $AP = m$, $BP = n$. Да се намери $\sphericalangle ACB$.*

Търсене на решение и решение.

Нека вписаната окръжност се допира до страната AC в точката M и до страната BC в точката N. Тогава $AM = m$ и $BN = n$. Да означим $\sphericalangle ACB = \gamma$. Тогава числата S, m и n са съществени елементи от условието на задачата, а числото γ е съществен елемент от заключението на задачата. За да открием връзка между условието и заключението на задачата ще ги „преобразуваме“ поотделно. Ще положим $CM = CN = x$.

По формулата за лице на триъгълник:

$$S = \frac{(m + x)\,(n + x)}{2}\sin\gamma = \frac{mn + mx + nx + x^2}{2}\sin\gamma.$$



Прилагаме косинусовата теорема за ΔABC:

$$\cos\gamma = \frac{(m+x)^2 + (n+x)^2 - (m+n)^2}{2\,(m+x)\,(n+x)} = \frac{-mn + mx + nx + x^2}{mn + mx + nx + x^2}.$$

Забелязваме че изразът $mx + nx + x^2$ се среща и в двете равенства и по тази причина може да играе ролята на **свързващ елемент** между условието и заключението на задачата. Изразът $mx + nx + x^2$ определяме от първото равенство, т.е. $mx+nx+x^2 = \dfrac{2S - mn\sin\gamma}{\sin\gamma}$ и заместваме във второто равенство. Така получаваме $\operatorname{cotg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{S}{mn}$, с което задачата е решена.

Здравко Вутов Лалчев
Дружба 1, бл. 159, вх. 2, ап. 409
1592 София
e-mail: zdravkol@abv.bg

Ирина Здравкова Вутова
Дружба 1, бл. 159, вх. 2, ап. 410
1592 София
e-mail: irna_zdravkova@mail.bg

CONNECTING ELEMENT

Zdravko V. Lalchev, Irina Z. Voutova

An idea for seeking a problem's solution is considered in the present report on the basis of specific problems from school geometry course. On the whole, the idea consists of finding an auxiliary element, which to be used in connecting the given data with the conclusion of the problem.