МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2003
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2003
Proceedings of the Thirty Second Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Sunny Beach, April 5–8, 2003

ОПРЕДЕЛЯНЕ МНОЖЕСТВОТО ОТ ФУНКЦИОНАЛНИ СТОЙНОСТИ ЧРЕЗ ИЗПОЛЗВАНЕ НА ПАРАМЕТРИЧНО УРАВНЕНИЕ

Петър Д. Петров, Добринка В. Бойкина

Представен е един метод за намиране на екстремални стойности (ако съществуват) на функции, зададени аналитично, без използване на понятието производна. Същността на метода се състои в определяне множеството от стойности на функцията $y = f(x)$. Като за целта това равенство се разглежда като параметрично уравнение с параметър y и се търси за кои стойности на уравнението има поне един реален корен. Приложението на метода е илюстрирано върху няколко конкретни функции.

Известна е тезата, че математиката синтезира три идеала на човешката дейност – разбирането, убеждаването и икономичността. За реализирането им, най-вече на последния от тях, спомагат и частноматематическите методи и похвати за намиране на най-голяма и най-малка стойност на изрази и функции. Безспорна е възможността за приложението им в други учебни дисциплини, ежедневието и практиката. Всичко това определя развиващите функции на този вид задачи. Затова те присъстват много често на различни математически конкурси и най-вече на кандидатстудентски изпити във ВУЗ.

Интерес представляват методите и средствата за намиране на екстремални стойности без помощта на производни. Те дават възможност да се разгърне във времето усвояването на умения за решаване на съответните класове задачи. От друга страна, в случаите, когато е възможно приложението им, често то се оказва рационално.

Определение 1. *За реалното число се казва, че е най-голяма стойност на функцията $f(x)$ в множеството D тогава, когато за всяко $x \in D$ е изпълнено $f(x) \leq M$ и съществува $x_0 \in D$, такова, че $f(x_0) = M$.*

Определение 2. *За реалното число N се казва, че е най-малка стойност на функцията $f(x)$ в множеството D тогава, когато за всяко $x \in D$ е изпълнено $N \leq f(x)$ и съществува $x_0 \in D$, такова, че $f(x_0) = N$.*

Идеята на използвания тук метод се състои в това да се определи множеството от стойности на функцията $y = f(x)$, като последното изразяване се разглежда като параметрично уравнение с параметър , след което се търси най-голямата или най-малката стойност, ако такива съществуват.

Нека илюстрираме казаното, като разгледаме първо най-често срещаната функция в училищния курс, а именно квадратната функция.

Задача 1. *Дадена е квадратната функция $y = x^2 - 5x + 6$, $x \in R$.*

а) Определете множеството от стойности на $y(x)$;

б) Намерете най-голямата и най-малката стойност на $y(x)$, ако такива съществуват.

Решение. Нека разгледаме $y = x^2 - 5x + 6$ като уравнение с неизвестно x и параметър y. Тогава $x^2 - 5x + 6 - y = 0$. Но x приема само реални стойности, което означава, че дискриминантата на уравнението трябва да бъде неотрицателна, т.е. $D = 25 - 4(6 - y) \geq 0 \Leftrightarrow 4y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -0,25$. Следователно множеството от функционални стойности са числата $y \geq -0,25$, т.е. интервалът $[-0,25; +\infty)$. Тогава функцията има само най-малка стойност $y = -0,25$, която се достига, когато $D = 0$, т.е. при $x = 2,5$, а няма най-голяма стойност.

Задача 2. Дадена е функцията $y = \sqrt{x^2 - 1} - 2x$.

а) Да се определи множеството от стойности на $y(x)$;

б) Да се намерят екстремумите на $y(x)$ при $x > 1$.

Решение. При решаването на тази задача не беше ясно как да използваме факта, че x приема реални стойности. Наложи се да я решим чрез производни и след това да прецизираме идеята на метода. Стигнахме до следното твърдение:

Задачата „да се определи множеството от функционални стойности на $y = f(x)$, $x \in D$“ може да се замени със задачата „да се намерят стойностите на параметъра y, за които уравнението $f(x) - y = 0$ има поне един реален корен“.

Основанието за това твърдение е, че ако определим всяка фиксирана стойност y_i, за която уравнението $f(x) - y_i = 0$ има поне един корен x_i, всъщност на всяко y_i от съответното множество сме съпоставили поне едно $x_i \in D$.

Сега нека намерим всички стойности на параметъра y, за които уравнението $y = \sqrt{x^2 - 1} - 2x$ има поне един реален корен. Уравнението е от вида $2x + y = \sqrt{x^2 - 1}$, $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

То е равносилно на системата

$$\left| \begin{array}{l} x \geq -\dfrac{y}{2} \\ (2x + y)^2 = x^2 - 1 \end{array} \right. .$$

Следователно търсим за кои стойности на y системата има поне едно решение. От уравнението на системата получаваме $g(x) = 3x^2 + 4yx + y^2 + 1 = 0$.

Това квадратно уравнение има поне едно решение точно тогава, когато $D \geq 0$, т.е. $4y^2 - 3y^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 - 3 \geq 0$, откъдето получаваме $y \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$.

Корените на уравнението $g(x) = 0$, които удовлетворяват неравенството на системата, са нейни решения. Следователно решенията на системата са измежду корените на уравнението. Тогава системата има поне едно решение тогава, когато $-\dfrac{y}{2} \leq x_1 \leq x_2$ или $x_1 \leq -\dfrac{y}{2} \leq x_2$, където x_1 и x_2 са реалните корени на $g(x) = 0$.

Първи случай. Като използваме необходимите и достатъчни условия, които осигуряват числото $-\dfrac{y}{2}$ да е не по-голямо от корените x_1 и x_2 на $g(x) = 0$, получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} 3\left(-\dfrac{y}{2}\right)^2 + 4y\left(-\dfrac{y}{2}\right) + y^2 + 1 \geq 0 \\ -\dfrac{y}{2} < -\dfrac{4y}{6} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} y^2 - 4 \leq 0 \\ y < 0 \end{array} \right. .$$

Решенията на последната за $y \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$ са $y \in [-2; -\sqrt{3}]$.

Втори случай. Като използваме необходимите и достатъчни условия числото $-\dfrac{y}{2}$ да е в интервала $[x_1; x_2]$ от корените, получаваме неравенството $-y^2 + 4 \le 0 \Leftrightarrow y^2 - 4 \ge 0$, решенията на което са $y \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Обединяваме резултатите от двата случая и намираме, че за $y \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [2; +\infty)$ уравнението $2x + \; = \sqrt{x^2 - 1}$ има поне един корен. Тогава множеството от стойностите на y е $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [2; +\infty)$. Следователно функцията няма нито най-голяма, нито най-малка стойност за $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

б) Като използваме необходимите и достатъчни условия, които гарантират числото 1 да е отляво на интервала от корените на $g(x) = 0$, получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} 3 + 4y + y^2 + 1 > 0 \\ 1 < -\dfrac{4y}{6} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (y+2)^2 > 0 \\ y < -\dfrac{3}{2} \end{array} \right. .$$

От нея и $y \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$ намираме $y \in (-\infty; -\sqrt{3}]$. Следователно при $x > 1$ функцията $y(x)$ приема най-голяма стойност $y = -\sqrt{3}$, а няма най-малка стойност.

Задача 3. *Дадена е функцията* $y = \dfrac{2x^2 + 3x + 8}{x}$, $x \ne 0$.

а) Да се определи множеството от стойности на $y(x)$*;*

б) Да се намерят екстремалните ѝ стойности при $x > 0$.

Решение. Разглеждаме $y = \dfrac{2x^2 + 3x + 8}{x}$ като уравнение с неизвестно x и параметър y. Тогава $y.x = 2x^2 + 3x + 8 \Leftrightarrow g(x) = 2x^2 + (3 - y)x + 8 = 0$.

Уравнението $g(x) = 0$ има поне един корен точно тогава, когато $D \ge 0$, т.е. $D = (3 - y)^2 - 4.2.8 \ge 0 \Leftrightarrow y^2 - 6y - 55 \ge 0$. Решенията на последното неравенство са $y \le -5$ или $y \ge 11$. От условието $x \ne 0$ следва, че $y \ne 3$ (Защо?).

Като използваме необходимите и достатъчни условия, за да бъде числото 0 отляво на интервала от корените на $g(x) = 0$, получаваме

$$\left| \begin{array}{l} 8 > 0 \\ 0 < \dfrac{y-3}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 8 > 0 \\ y > 3 \end{array} \right. .$$

Оттук и $y \le -5$ или $y \ge 11$ получаваме, че $y \ge 11$. Следователно при $x > 0$ множеството от стойности на функцията е $y \in [11; +\infty)$. Тогава най-малката стойност на функцията е $y = 11$. Тази стойност анулира дискриминантата D на квадратното уравнение $g(x) = 0$, от където намираме, че тя се достига при $\; = 2$. Функцията няма най-голяма стойност.

Най-малката стойност на функцията при $x > 0$ може да се намери и чрез отделяне на точен квадрат.

$$y = \frac{2x^2 + 3x + 8}{x} = 2x + \frac{8}{x} + 3 = \left(\sqrt{2x} - \sqrt{\frac{8}{x}}\right)^2 + 8 + 3 = \left(\sqrt{2x} - \sqrt{\frac{8}{x}}\right)^2 + 11.$$

Задача 4. *Да се намерят най-голямата и най-малката стойности, ако съществуват, на функцията* $y = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$, $x \in R$ *и стойностите на аргумента, за които те се достигат.*

Решение. Преобразуваме и последователно получаваме $y(x^2+1) = x^2+2x+1 \Leftrightarrow yx^2 + y = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow g(x) = (y-1)x^2 - 2x + y - 1 = 0$.

При $y = 1$ уравнението $g(x) = 0$ е еквивалентно на $-2x = 0$. Следователно при $y = 1$ уравнението има поне едно решение.

При $y \neq 1$ уравнението $g(x) = 0$ е квадратно относно x. Дискриминантата му е $D = 1 - (y-1)^2 = (1-y+1)(1+y-1) = y(2-y)$. Уравнението $g(x) = 0$ има поне един корен точно тогава, когато $D \geq 0$, т.е. $y(2-y) \geq 0$, откъдето получаваме $y \in [0; 1) \cup (1; 2]$.

Като обединим двата случая, получаваме, че множеството от стойностите на функцията y е $[0; 2]$. Следователно дадената функция притежава най-голяма стойност $y = 2$ и най-малка стойност $y = 0$. Тези стойности анулират дискриминантата на $g(x) = 0$ и по такъв начин намираме, че при $x = -1$ дадената функция достига своята най-малка стойност, а при $x = 1$ – най-голямата си стойност.

Задача 5. *Да се докаже, че функцията* $y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$, $x \in R$ *притежава най-малка и най-голяма стойност. Да се намерят тези стойности.*

Отг. $y_{\min} = \dfrac{1}{3}$, $y_{\max} = 3$.

Задача 6. *Дадена е функцията* $y = \dfrac{2^{x+1}-5}{2^x+3}$. *Да се определи множеството от стойности на функцията и се намерят екстремумите, ако такива съществуват.*

Решение. Аналитичният вид на дадената функция разглеждаме като уравнение с неизвестно x и параметър y. Търсим всички стойности на параметъра y, за които уравнението има поне един корен. Преобразуваме и последователно получаваме $y.2^x + 3y = 2^{x+1} - 5 \Leftrightarrow (2-y)2^x = 3y + 5$.

При $y = 2$ уравнението добива вида $0.2^x = 11$, което няма решение.

При $y \neq 2$ уравнението $2^x = \dfrac{3y+5}{2-y}$ има решение, ако $\dfrac{3y+5}{2-y} > 0$, т.е. $y \in \left(-\dfrac{5}{3}; 2\right)$. Следователно функцията няма най-голяма и най-малка стойност.

В заключение можем да отбележим следните особености на разгледания метод:

– Когато се стигне до решаване на параметрично квадратно уравнение и има ограничения за неизвестното, с успех могат да се използват необходимите и достатъчни условия за разположение на корените на квадратното уравнение спрямо числа и интервали;

– Той е обобщен метод и често се оказва рационален;

– При приложението му се изисква добра техника и голямо внимание.

Добре е да се прилага комбинирано с другите методи от този тип (за по-добър контрол) и да се правят приближени оценки.

Този метод, в известен смисъл, може да се обобщи. Например решаването на задачата „да търсим множеството от функционални стойности на $y = \dfrac{2^{x+1}-5}{2^x+a}$“ се свежда към решаването на задачата „да се намерят всички стойности на параметъра y, за които съществува такова a, че даденото уравнение да има поне едно решение.“ В такъв случай множеството от функционални стойности ще е описано чрез параметъра a и това дава възможности да се съставят интересни задачи, като се поставят допълнителни условия за него.

ЛИТЕРАТУРА

[1] П. И. Горнщейн и др. Задачи с параметри. С., 2000.
[2] Г. Кожухарова и др. Екстремални задачи. Ст. Загора, 1996.

Петър Динев Петров
кв. „Три чучура“ бл. 22, вх. А, ап.27
6010 Стара Загора, България

Добринка Василева Бойкина
ПУ „П. Хилендарски“
ул. Цар Асен 24
4000 Пловдив, България

DETERMING THE SET OF FUNCTIONAL VALUES USING AN EQUATION WITH PARAMETERS

Peter D. Petrov, Dobrinka V. Boikina

There is presented one method for finding extreme values of functions, defined analytical, without using the term derivative. The idea of the method is determining the set of values of the function $y = f(x)$. For this purpose the given equation is treated as an equation with a parameter y and then we have to find for which values of y the equation has at least one real root. The application of the method is illustrated upon some concrete functions.