МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2003
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2003
Proceedings of the Thirty Second Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians
Sunny Beach, April 5–8, 2003

КОМПЮТЪРНО МОДЕЛИРАНЕ С ПРИЛОЖЕНИЯ В ОБРАЗОВАНИЕТО

Йордан Б. Табов, Невена Ж. Събева

В съвременното обучение по математика има място за разработване на образователни модули, отразяващи възможностите с достъпен математически апарат да се моделират процеси от широк кръг области (химия, физика, биология, икономика и т.н.). Използването на подходящи софтуерни продукти позволява да се илюстрират важни методи и идеи за решаване на задачи, избягвани досега от съображения за техническа трудност при реализацията им.
Разглеждайки задачата на Дирихле за топлинно равновесие, превеждаме на достъпен за ученици език основните физични принципи, идеите за съставяне на математически модел на процеса и за използване на числени методи при неговата реализация. В един от предложените примери прилагаме модела за случай на задача на Дирихле в област с особена точка, който излиза извън границите на класическите постановки и третиране.

1. Задача на Дирихле за топлинно равновесие. В нестационарно температурно поле без топлинни източници температурата T в точка $X(x,y,z)$ се променя в зависимост от времето t по уравнението на Лаплас
$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\triangle T=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right).$$
където $\triangle$ е операторът на Лаплас, а a е топлопроводността на тялото.

При топлинно равновесие горното уравнение се редуцира в уравнението
$$\triangle T=0. \tag{1}$$
Нека температурата по границата $\Gamma(D)$ на дадена област D е известна, т.е.
$$T(X)=f(X),\ X\in\Gamma(D). \tag{2}$$
Задачата за определяне на температурата $T(X)$ в точките от D при топлинно равновесие (условия (1) и (2)) е така наречената задача на Дирихле.

2. Мрежов модел на температурно разпределение при топлинно равновесие. Нека за дадена равнинна пластинка е известно разпределението на температурата по нейната граница. За да определим температурата при топлинно равновесие в произволна вътрешна точка X, ще построим запълваща пластинката квадратна мрежа. Температурата в граничните възли на мрежата се определя от температурата на най-близките до тях точки от границата на пластинката. Оказва се, че при подходяща гъстота на мрежата температурата в най-близкия до вътрешната точка X възел е достатъчно добро приближение за температурата в X. Това обуславя и широката приложимост на мрежовия модел.

С това построение възниква нова задача – задачата на Дирихле за квадратна мрежа от проводници. Нека с D означим съвкупността от възлите на мрежата, с $I(D)$ - множеството от вътрешните възли от D (тези, за които и четирите им съседни възела принадлежат на D), а с $\Gamma(D)$ – съвкупността на останалите, т.нар. гранични възли. За всяка вътрешна точка X, под $[X]$ ще разбираме множеството от четирите ѝ съседни възела. Задачата за определяне на температурата във вътрешните възли на мрежата при зададена температура в граничните възли е частен (дискретен) случай на задачата на Дирихле и можем да я запишем по следния начин [1]:

$$(3) \qquad \left| \begin{array}{ll} T(X) = \dfrac{1}{4} \sum\limits_{Y \in [X]} T(Y), & X \in I(D) \\ T(X) = f(X), & X \in \Gamma(D). \end{array} \right.$$

Получената система линейни уравнения има единствено решение, чието намиране при голям брой вътрешни възли е алгоритмично ясно, но представлява техническа трудност. Това налага използването на приблизителни числени методи, например, методът на итерациите.

При този метод избираме произволни начални стойности на търсените температури и при всяка итерация пресмятаме нови приблизителни стойности на температурата във вътрешните възли като средно аритметично на получените при предишната итерация температури в съседните им възли. Процесът спира, например, когато разликата между две последователни итерационни стойности на температурата във всеки възел стане достатъчно малка. Без да навлизаме в подробности, ще отбележим, че за (3) итерационният процес е сходящ.

Тази процедура се изпълнява удобно и лесно с помощта на Excel. Достатъчно е да въведем граничните стойности, съответните формули във вътрешните възли и броя на итерациите. Така реализацията на изведения модел при конкретно зададени начални стойности е по силите на широк кръг ученици.

Наблюдавайки последователните итерации при въвеждане на дадената информация в таблицата на Excel, можем нестрого да ги интерпретираме като етапи в процеса на достигане на топлинно равновесие в дадената мрежа при топлообмен, започнал с произволно избраните във вътрешните точки стойности на температурата.

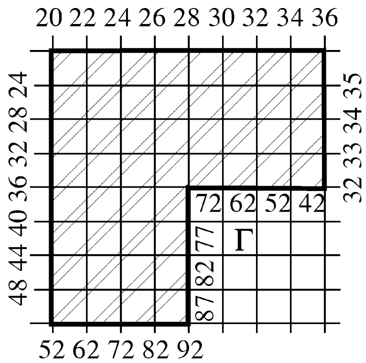
За да може учениците да сравнят по-добре идеята на мрежовия модел на задачата на Дирихле е целесъобразно тя да се представи в няколко стъпки [2]:

1) Разпределение на температурата по отделен проводник;

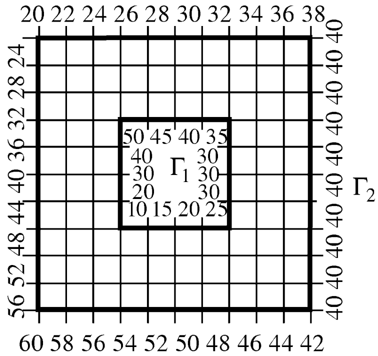
2) Разпределение на температурата по два проводника с обща вътрешна точка („кръг от проводници“) и обяснение на принципа за средните стойности;

3) Разпределение на температурата в проста квадратна мрежа и принцип за средните стойности по възлите.

2. Няколко приложения на мрежовия метод. Да приложим мрежовия метод за определяне на температурно разпределение при топлинно равновесие в две практически постановки: за Г-образна пластинка (фиг. 1) и квадратна пластинка с квадратен отвор (фиг. 2) с въведена квадратна мрежа; температурата в граничните възли е посочена на чертежите.



Фиг. 1



Фиг. 2

По описания метод, след въвеждане на дадената температура в граничните възли и итерационните формули във вътрешните възли и след 100 итерации получаваме съответните таблици за (приблизително) температурно разпределение при топлинно равновесие (фиг. 3 и фиг. 4).

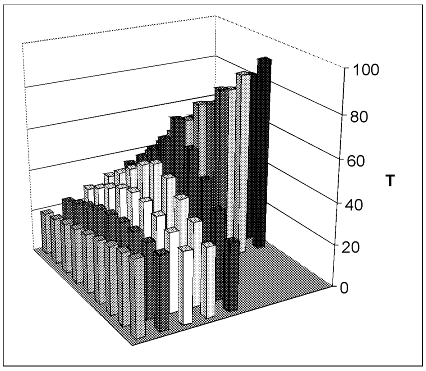
20	**22**	**24**	**26**	**28**	**30**	**32**	**34**	**36**
24	27,15885	30,19925	32,91465	34,94147	35,87351	35,97146	35,58956	**35**
28	32,4369	36,72443	40,51866	42,97825	42,58146	40,42297	37,38682	**34**
32	37,86527	43,74393	49,4581	53,8719	51,05139	45,75227	39,53477	**33**
36	43,28107	50,92875	59,69843	**72**	**62**	**52**	**42**	**32**
40	48,33086	56,99212	66,40703	**77**				
44	53,05063	62,30214	71,93766	**82**				
48	57,56972	67,22833	77,0415	**87**				
52	**62**	**72**	**82**	**92**				

Фиг. 3

20	**22**	**24**	**26**	**28**	**30**	**32**	**34**	**36**	**38**	**40**
24	26,49064	29,11897	31,60345	32,74851	33,1905	33,50791	34,20931	35,81556	37,83898	**40**
28	30,84375	34,3819	38,54636	38,20012	36,50561	34,63182	33,51377	35,21395	37,54038	**40**
32	34,50264	39,01863	**50**	**45**	**40**	**35**	**30**	33,9861	37,1086	**40**
36	36,14837	37,19008	**40**				**30**	33,62188	36,90791	**40**
40	36,90099	33,59341	**30**				**30**	33,59353	36,90116	**40**
44	37,86243	30,28266	**20**				**30**	33,8511	37,10322	**40**
48	40,26629	29,6749	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**	34,70766	37,66063	**40**
52	45,52802	38,15074	30,14729	29,2728	30,68143	32,84115	35,18	37,31894	38,83165	**40**
56	51,69522	47,2529	43,16568	41,26256	40,6118	40,50322	40,55992	40,55647	40,34703	**40**
60	**58**	**56**	**54**	**52**	**50**	**48**	**46**	**44**	**42**	**40**

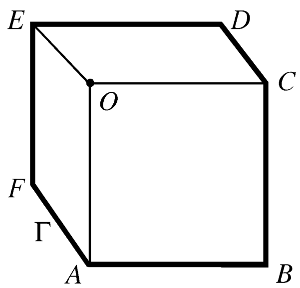
Фиг. 4

Използвайки предлаганите от Excel възможности за графично представяне на данни, можем да онагледим полученото температурно разпределение при Г-образната пластинка със следната диаграма (фиг. 5).

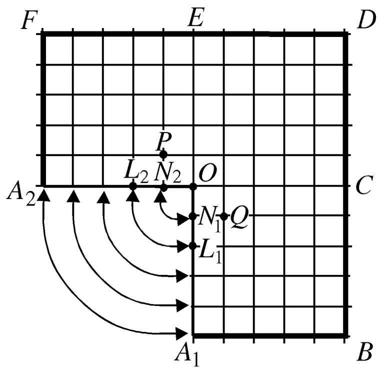


Фиг. 5

Друго съдържателно приложение на посочения модел е при решаване на задачата на Дирихле за повърхнина с особена точка. Такава е повърхнината, образувана от три стени на куб с общ връх O (фиг. 6). Температурата в точките от ръбовете AB, BC, CD, DE, EF, FA е известна; търси се температурата във вътрешните точки на стените и в точките от ръбовете OA, OC, OE.



Фиг. 6



Фиг. 7

Разрязвайки повърхнината по ръба OA, получаваме нейна разгъвка (фиг. 7), за която можем да модифицираме описания мрежов модел. Тъй като OA_1 и OA_2 представят ръба OA, съседните възли на $N_1 \equiv N_2$, например, ще бъдат O, P, Q и $L_1 \equiv L_2$. Освен това, температурата в O се определя като средно аритметично на температурите в трите съседни на O върха от ръбовете OA, OC и OE. При конкретно зададена температура в граничните точки, по този модел получаваме следното температурно разпределение (фиг. 8):

Ще отбележим, че използването на класическия модел, състоящ се от уравненията (1) и (2), не е възможно в последния пример върху повърхнината на куба, защото операторът на Лаплас не може да бъде дефиниран в точката O. Модификация на този модел и доказателства за съществуване и единственост на съответните задачи на Дирихле за различни случаи на особени точки са изложени в [3] и [4].

20	**22**	**24**	**26**	**28**	**30**	**32**	**34**	**36**	**38**	**40**
19	21,14073	23,2593	25,34177	27,38579	29,40325	31,42117	33,47395	35,5878	37,76995	**40**
18	20,30319	22,55404	24,72118	26,79723	28,80516	30,80673	32,88622	35,10691	37,49186	**40**
17	19,51734	21,93148	24,19043	26,27546	28,21213	30,11321	32,15642	34,46122	37,09036	**40**
16	18,83387	21,46289	23,83211	25,90044	27,65312	29,27617	31,16399	33,49052	36,40813	**40**
15	18,3544	21,25279	23,77308	25,83936	27,22206	28,1729	29,73171	31,92807	35,05142	**40**
					25,83936	26,46022	27,6608	29,43795	31,86927	**35**
					23,77308	24,16656	25,01236	26,2931	27,98753	**30**
					21,25279	21,41959	21,92825	22,73415	23,78762	**25**
					18,3544	18,33017	18,54648	18,92736	19,42874	**20**
					15	**15**	**15**	**15**	**15**	**15**

Фиг. 8

Мрежовият модел има важни предимства: не изисква познаването на частни производни и използването му в случаи на особени точки е интуитивно ясно. Съчетанието му със съвременни компютърни методи го прави подходящ за преподаване в средното и висше образование.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Демидович, И. Марон. Основы вычислительной математики. ГИФМЛ, Москва, 1963.

[2] Й. Табов, Н. Събева. Компютърно моделиране на температурно разпределение при топлинно равновесие. *Математика и информатика* (под печат).

[3] Й. Табов. О задаче Дирихле для уравнения Лапласа на многообразиях с особенностями. *Сердика* **8**, (1982), 418–424.

[4] Й. Табов. Задача Дирихле для уравнения Пуассона на двух пересекающихся плоскостях. *Успехи Мат. Наук* **43** (1988), No 1, 211–212.

Йордан Б. Табов
Институт по математика и информатика
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: tabov@tabov.com

Невена Ж. Събева
Институт по математика и информатика
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: nsybeva@yahoo.com

COMPUTER MODELING WITH APPLICATIONS IN EDUCATION

J. Tabov, N. Sabeva

In the modern education in mathematics there are different opportunities for creating educational modules in which using standard mathematical tools processes of wide range of topics (chemistry, biology, economy) can be modeled. Applying suitable software we can illustrate important methods and ideas for solving problems avoided in the standard education because they are considered as requiring complicated mathematics. In the case of Dirichlet's Problem for heat equilibrium we translate into language understandable for the students the basic physical principles, ideas for creating the mathematical model of the process and for using computational methods for its representation. In one of the suggested examples we apply this model to a case of Dirichlet's problem in a region having an irregular point, which case lies beyond the borders of the classical formulations and treating.