МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2003
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2003
Proceedings of the Thirty Second Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Sunny Beach, April 5–8, 2003

КРАТНИ НЮТОНОВИ ИНТЕГРАЛИ

Владимир Т. Тодоров, Петър В. Стоев

В тази публикация се опитваме да избегнем ортодоксалния подход към преподаването на темата кратни интеграли за ВТУЗ. За тази цел разглеждаме „частни примитивни“ на функции на много променливи.

В [2] предложихме идеята за използването на подхода на Нютон при преподаването на определен интеграл. Той според нас е удачен за преподаването на интеграли в различни приложни дисциплини. В тези университети, където се изучават и кратни интеграли обаче ползата от този подход се неутрализира от необходимостта да се разглеждат риманови суми или суми на Дарбу за *кратни* интеграли. Те имат по-сложна геометрична интерпретация от съответните суми за функции на един аргумент и разбира се, в никакъв случай не са благодатна тема за преподаване.

Следва да отбележим, че стандартната практика за преподаване на тази тема в техническите и икономическите университети и в този случай следва ортодоксалната версия, която е утвърдена преди около 150 години в университетите в Европа. Темата „кратен интеграл“ се преподава и сега по същия начин: дефинират се суми на Дарбу или Риман за кратен интеграл, обяснява се (най-често без разбиране на материята) какво е граница на такива суми (фактически граници на обобщени редици) и след това се тръгва по нелекия път на борба с тази дефиниция. При това в някои учебници тази процедура се повтаря монотонно – за двоен интеграл, за троен интеграл и т.н. Тук предлагаме версия, която осигурява единен подход при преподаване на кратни интеграли.

По наше мнение, дори и определените интеграли да са дефинирани посредством риманови суми или друг еквивалентен подход, няма никаква необходимост от травмиращото повторение на разсъжденията за сходимост на някакъв тип интегрални суми.

И така, ще се опитаме да избегнем ортодоксалния подход към темата кратни интеграли като експлоатираме максимално цялата информация за определен интеграл от функции на един аргумент, с която разполагат студентите след усвояването на първия курс по анализ (в повечето Технически Университети – ТУ това обикновено е Анализ, I част).

1.1. На пръв поглед идеята, която лансираме тук е твърде „радикална“. Тя е аналог на схващането на Нютон за определен интеграл и подобна схема на разсъждения се съдържа например в [3], стр. 147–148.

Ще разглеждаме първоначално двоен интеграл върху правоъгълници със страни, успоредни на координатните оси:

$$P = \{(x,y) | a \le x \le b; c \le y \le d\}$$

В по-съвременна терминология P е двумерният интервал $[a,b;c,d]$.

Да допуснем сега, че F е (x,y)-примитивна на f в правоъгълника $P = [a,b;c,d]$ в смисъл, че $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y) \quad \forall (x,y) \in P$.

Дефиниция. *Двоен интеграл от f върху P наричаме числото* $\int\limits_P f = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c)$.

Директно от дефиницията следва, че интегралът е линеен функционал. Лесно се съобразява също така, че ако P е сума на два правоъгълника с обща страна: $P = P_1 \cup P_2$, то $\int\limits_P f = \int\limits_{P_1} f + \int\limits_{P_2} f$. Аналогично не е трудно да се съобрази, че ако $P = \bigcup\limits_{k=1}^{m} P_k$ е разделяне на P на правилна правоъгълна мрежа, то $\int\limits_P f = \sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{P_k} f$. Това следва от факта, че ако (x_i, y_j) е вътрешен възел за такава мрежа, то $f(x_i, y_j)$ участвува в сумата $\sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{P_k} f$ два пъти със знак $(-)$ и два пъти със знак $(+)$. Изобщо „теглото“ на всеки възел с четна кратност е нула – това може да се обясни лесно с помощта на няколко примера. Дори преподавателят да е склонен към формализация и (понякога ненужна) прецизност, комбинаторните свойства на сумата $\sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{P_k} f$ се изучават без особени усилия.

По такъв начин се вижда, че интегралът е адитивен за сума на правоъгълници, чиято теоретико множествена сума е отново правоъгълник.

Горното наблюдение ни позволява да дефинираме интеграл за области, които са правилни суми на правоъгълници. Върху такива области така определения интеграл по дефиниция е адитивен.

1.2. Разбира се, тази дефиниция има някои недостатъци. Първо, не е ясно дали тя изобщо е коректна. Също така притеснителен е факта, че a priori беше използвана някаква (x,y)-примитивна на f, за чието съществуване не е казано нищо. От друга страна, защо да не се използва например (y,x)-примитивна?

Тук предполагаме, че студентите имат познания по Анализ, по точно, че са запознати с определени интеграли и интеграли, зависещи от параметър; впрочем второто предположение не е необходимо условие.

И така, ако f е напрекъсната върху P, то можем да положим

$$F(x,y) = \int\limits_a^x \left(\int\limits_c^y f(\xi,\eta)\, d\eta \right) d\xi.$$

С други думи, пресмятането на двоен интеграл се свежда до последователното пресмятане на две примитивни. Ясно е, че $\int\limits_P f = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\, dy \right) dx$ и от тук получаваме, че интегралът е положителен функционал (т.е. ако $f(x,y) \le g(x,y)$, то $\int\limits_P f \le \int\limits_P g$.

1.3. Нека сега областта P е представена като сума на краен брой правоъгълници от вида $P_{ik} = [x_i, x_{i+1}; y_k, y_{k+1}]$ и да положим $I_{ik} = \int\limits_{P_{ik}} f$. Разглеждаме функцията $\varphi(t) = F(t, y_{k+1}) - F(t, y_k)$. От теоремата на Лагранж получаваме, че $I_{ik} = \varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i) = \varphi'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \varphi'(\xi_i)\Delta x_i$. От друга страна $\varphi'(\xi_i) = F'_x(\xi_i, y_{k+1}) - F'_x(\xi_i, y_k)$ и отново от теоремата на Лагранж се получава, че $F'_x(\xi_i, y_{k+1}) - F'_x(\xi_i, y_k) = F''_{xy}(\xi_i, \eta_k)(y_{k+1} - y_k) = F''_{xy}(\xi_i, \eta_k)\Delta y_k = f(\xi_i, \eta_k)\Delta y_k$. Окончателно за правоъгълника P получаваме

$$\textbf{(rs)} \qquad \int\limits_P f = \sum_{i,k} f(\xi_i, \eta_k)\Delta x_i \Delta y_k = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c)$$

което означава, че интеграла е равен на риманова сума за съответното разбиване.

От (rs) се получава, че $\int\limits_P f$ не зависи от реда на интегрирането, защото сумата не зависи от това, а разделянето може да е с произволна дребност. Равенството (rs) е важно и за приложенията на двойните интеграли. И накрая, (rs) е вярно и за елементарни области. Елементарни наричаме онези области, които са суми на правоъгълници със страни успоредни на координатните оси (в многомерния случай – равнини), чиито вътрешности имат празни сечения. Фактически (rs) показва, че за всеки непрекъсната функция f и елементарна област P *съществува подредица в смисъл на обобщени редици* на римановите суми на f, която е константа, равна на $\int\limits_P f$.

При желание от страна на лектора без особени усилия може да се покаже, че за всяка достатъчно просто устроена област G – например с по части гладка (или даже по части аналитична) граница и за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват две елементарни области P і Q, за лицата $\sigma(P)$ і $\sigma(Q)$ на които е изпълнено $\sigma(P) - \sigma(Q) < \varepsilon$ и освен това $Q \subset G \subset P$ (ще отбележим, че не е нужно да се дефинира отделно лицето на елементарна област – то е сума от лица на правоъгълници). Това позволява да се изгради теория на интеграла върху по-широк клас от области без да се използват понятия от рода, например на обобщени редици.

2.1. В следващия текст ще разглеждаме стандартното евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с елементи $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и стандартната норма $|\vec{x}| = \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$. За $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ неравенството $\vec{a} \leq \vec{b}$ означава, че $a_i \leq b_i$ $\forall i = 1, 2, \ldots n$. С $[\vec{a}, \vec{b}]$ означаваме n-мерния интервал $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | \vec{a} \leq \vec{x} \leq \vec{b}\}$. Ще казваме, че F е $\vec{x}$-примитивна на f в $[\vec{a}, \vec{b}]$, ако

$$\frac{\partial^n f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} = f(\vec{x})$$

за всяко $\vec{x}$ от $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Дефиниция. *Ако f има $\vec{x}$-примитивна в $[\vec{a}, \vec{b}]$, то n-кратен интеграл от f върху n-мерната призма $[\vec{a}, \vec{b}]$ наричаме сумата*

$$\int\limits_{[\vec{a},\vec{b}]} f = \sum_{\varepsilon(\vec{z})} (-1)^{\varepsilon(\vec{z})} F(z_1, z_2, \dots z_n)$$

където за всяко $z_i \in \{a_i, b_i\}$*, а* $\varepsilon(\vec{z})$ *броя на тези индекси* i*, за които* $z_i = a_i$*. Например за* $n = 3$ *имаме*

$$\int\limits_{[\vec{a},\vec{b}]} f = F(b_1, b_2, z_3) - F(a_1, b_2, z_3) - F(b_1, a_2, z_3) + F(a_1, a_2, z_3) \Big|_{a_3}^{b_3} =$$

$$F(b_1, b_2, b_3) - F(b_1, b_2, a_3) - F(a_1, b_2, b_3) + F(a_1, b_2, a_3) -$$
$$F(b_1, a_2, b_3) + F(b_1, a_2, a_3) + F(a_1, a_2, b_3) - F(a_1, a_2, a_3)$$

Тук използвахме стандартната символика: ако $A(z_3)$ е функция на z_3, то $A(z_3)|_{a_3}^{b_3} = A(b_3) - A(a_3)$. Посредством аналогични разсъждения (като в точка 1) може да се развие теорията на n-кратните интеграли от непрекъснати функции върху елементарни области; тоест правилни суми на n-мерни интеграли. Ще отбележим, че в повечето ТУ обикновено се разглеждат случаите $n = 2$ и 3.

2.2. Запасът от области, върху които можем да пресмятаме интеграли може да бъде разширен, ако разглеждаме по-големи класове от функции. Например можем да разглеждаме функции, които имат обобщени примитивни. Обобщената примитивна е функция, която е $\vec{x}$-примитивна на f във всяка вътрешна точка на подходящо разделяне на n-мерния интервал $[\vec{a}, \vec{b}]$. По точно нека $[\vec{a}, \vec{b}] = \sum\limits_{k=1}^{m} D_k$ е разделяне на интервала $[\vec{a}, \vec{b}]$ на области. Това означава, че D_k і D_i за $k \neq i$ нямат общи вътрешни точки. При това можем да избираме границите на D_k така, че коректността на понятията, които се използват да се обосновава без протяжни разсъждения или неестествени от приложна гледна точка условия. За целите на много приложения например е напълно достатъчно да се разглеждат области в $\mathbb{R}^2$, границите на които са суми краен брой изпъкнали и аналитични криви. Аналогично условие върши работа и в многомерния случай.

Дефиниция. *Функцията* F *е обобщена примитивна на* f *в интервала* $[\vec{a}, \vec{b}]$*, ако* F *е непрекъсната в* $[\vec{a}, \vec{b}]$ *і съществува такова разделяне* $[\vec{a}, \vec{b}] = \sum\limits_{k=1}^{m} D_k$ *на* $[\not<, \underline{/}]$*, че*

$$\frac{\partial^n f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} = f(\vec{x})$$

за всяко $\vec{x}$ *от* $\sum\limits_{k=1}^{m} \mathrm{Int(D_k)}$ (*сумата от вътрешностите на* D_k).

Лесно се вижда, че ако f има обобщена примитивна в $[\vec{a}, \vec{b}]$, то за произволно разделяне $\triangle$ на $[\vec{a}, \vec{b}]$ съществува подразделяне $\triangle'$ и риманова сума $R_{t'}$ която за разделянето $\triangle'$ *е равна* на $\int\limits_{[\vec{a},\vec{b}]} f$. Това по наше мнение осигурява достатъчно богат клас от интегрируеми функции върху достатъчно широк клас от области за да обслужи нуждите на приложните раздели от естествознанието.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Бурбаки. Функции действительного переменного (элементарная теория). Наука, 1965.

[2] В. Тодоров, П. Стоев, М. Константинов. Нютонови интеграли. *Математика и математическо образование*, **31** (2002), 290–294.

[3] Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том III. Наука, 1969.

Вл. Тодоров, П. Стоев
УАСГ, бул. Хр. Смирненски 1
1421 София

NEWTON MULTIPLE INTEGRALS

Vl. Todorov, P. Stoev

The paper deals with some aspects of teaching the concept of multiple integrals at Technical and Economical Uniersities. Here we introduce the idea for “primitive” function of functions of several variables.