

СИСТЕМИ ЗА КОМПЮТЪРНА АЛГЕБРА В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА *

М. Спиридонова, М. Нишева, Д. Николова, Б. Куюмджиева

В научните програми на Пролетните конференции на СМБ през последните години нееднократно е присъствала темата за използване на системи за компютърна алгебра и графични калкулатори в обучението по математика. Настоящият семинар отново разглежда основни аспекти на този проблем, с информация за конкретни системи и техни приложения в обучението по математика и информатика в средните училища и университетите, при това – както за преподаване на нови знания, така и за усвояване на знания и умения чрез самостоятелни занимания на учениците и студентите. Разглеждането се съпровожда с много демонстрационни примери.

Системите за компютърна алгебра (СКА), наричани често системи за математически пресмятания, системи за символни и алгебрични преобразования или системи за компютърна математика, представляват програмни среди за символни и числени пресмятания и за визуализация на функции и данни.
(<http://www.math.bas.bg/artint/mspirid/CA&ME>).

Сред многобройните приложения на СКА важен дял заемат тези, които са свързани с процеса на обучение по математика, а също така с обучението по информатика, физика, химия и други дисциплини. У нас СКА се използват в някои университети, а в средните училища опитите вероятно се броят на пръсти. Причините за това са от различен характер.

Тъй като, независимо от проблемите, добрата информираност е важна предпоставка за използване на определени средства в процеса на обучение, предлагаме синтезирана информация за конкретни СКА – Mathematica, MuPAD, GEONExT и графичните калкулатори TI-92 (с вградена система за компютърна алгебра) и техни приложения.

Mathematica (<http://www.wolfram.com/products/mathematica>) е широко разпространена универсална СКА. Тя може да се разглежда като интегрирана съвкупност от програмна система и език за програмиране, предназначени за решаване на математически задачи.

Вградените средства на *Mathematica* са ориентирани към решаване на задачи в множество области, най-типичните от които са:

– алгебра (опростяване и преобразуване на изрази, работа с вектори и матрици, намиране на базис на Гробнер, решаване на алгебрични уравнения и системи уравнения и др.);

*Работата е частично финансирана по Договор И-1002/2000 г. с НФНИ.

- математически анализ (диференциране, интегриране, разлагане в редове, работа със специални математически функции и др.);
- диференциални уравнения (решаване на обикновени и частни диференциални уравнения и системи диференциални уравнения);
- числени методи;
- компютърна графика (създаване на двумерни и тримерни графични изображения, в частност визуализация на функции; анимация на графични обекти и др.).

Mathematica поддържа свой собствен език за програмиране, който предоставя средства за процедурно програмиране, функционално програмиране и програмиране чрез т. нар. преобразуващи правила. Сред типичните конструкции, които поддържат процедурния стил на програмиране в *Mathematica*, са оператори за присвояване (незабавно и отложено), условни оператори (с едно условие и с променлив брой условия), оператори за цикъл (*while* и *for*) и др. Програмирането във функционален стил се поддържа от средства за дефиниране на различни типове функции (именувани, чисти, анонимни) и суперпозиция на функции. Дефинирана е подходяща алгебра на функции с възможности за извършване на аритметични операции между функции. При програмиране чрез преобразуващи правила се използват средствата на езика за дефиниране и прилагане на глобални и локални правила за преобразуване на изрази, а също така възможностите за определяне на разнообразни шаблони, дефиниращи класовете от изрази, върху които се прилагат дадени правила.

Езикът за програмиране на системата *Mathematica* е изключително богат и предоставя отлични възможности за сравнително изучаване на различни стилове на програмиране. Могат да бъдат показани и някои специфични за езика средства като например тези за дефиниране на контекст и оформяне на т. нар. пакети на *Mathematica*. Удобният интерфейс на системата предлага, в частност, възможности за лесно документиране и публикуване на резултати, получени с помощта на *Mathematica*, за подготовка на учебни материали, статии и др.

Mathematica е търговски продукт на фирмата Wolfram Research, САЩ. Актуална е версията *Mathematica 4.2*. Три специализирани версии на системата (и с по-ниска цена от тази на основната версия) улесняват нейното приложение в обучението: *Mathematica for Students* (<http://www.wolfram.com/products/student/mathforstudents>), *Mathematica for the Classroom* (<http://www.wolfram.com/products/classroom>) и *Mathematica Teacher's Edition* (<http://www.wolfram.com/products/teachersedition>). *Mathematica* се разпространява с подробна документация в електронен формат, която е удобна за използване и е илюстрирана с голям брой подходящи примери. Освен това, в Интернет могат да бъдат намерени множество добре направени безплатни учебни материали за *Mathematica* и нейни приложения.

Демонстрационните примери, които съпровождат представянето на *Mathematica*, илюстрират характерните ѝ възможности, като се прави опит те да се свържат и с някои теми от учебните програми в средните училища и ВУЗ.

Програмният пакет Poncelet, който е програмиран на езика на системата *Mathematica* и се използва в нейната програмна среда, също е подходящ за приложение с учебна цел. Този пакет носи името на автора на една известна теорема, стояща в основата на пресмятанята в пакета. Теоремата е свързана с намирането на всички триъгълници, които имат една и съща вписана и описана окръжност (ако за две дадени окръжности има един триъгълник, за който те са съответно вписа-

на и описана окръжност, то има и безкрайно много такива триъгълници, съгласно *Jean-Victor Poncelet*). А две окръжности са съответно вписана и описана за даден триъгълник тогава и само тогава, когато за техните радиуси и разстоянието между центровете им е валидна формулата на Ойлер от съответната негова теорема.

Песмятията и геометричните построения в пакета *Poncelet* (базирани на формули, изведени за тази цел от акад. Петър Кендеров) позволяват илюстрация на споменатата теорема, изследвания и проверки на хипотези за случаи, в които формулата на Ойлер е валидна или не, когато вместо триъгълник разглеждаме произволен n -ъгълник и др. Използването на анимация прави графичните изображения по-интересни и запомнящи се. А основните функции, дефинирани в пакета, могат да се използват за лесно разширяване на неговите възможности.

MuPAD (<http://www.muPAD.de/>) е СКА, специално предназначена за подпомагане на обучението по математика и използването на математически апарат в горния училищен курс и началните университетски курсове.

Системата предоставя удобна за крайния потребител (преподавател, ученик, студент) среда за извършване на символни, числени и графични пресмятания, насочени към решаване на широк кръг математически задачи като например: опростяване на алгебрични и трансцендентни изрази, символно диференциране, пресмятане на неопределени и определени интеграли, решаване на уравнения и системи уравнения, работа с матрици, визуализация на функции.

Езикът за програмиране на *MuPAD* е подобен на езика Pascal. Той е лесен за научаване и удобен за използване, при това е снабден с подходящи средства за проверка и поправка на програми.

Със средства на езика на *MuPAD* могат да бъдат изключени или дефинирани повторно почти всички вградени правила за символни преобразования, което създава предпоставки системата да бъде настроена за работа в съответствие с нивото на математически знания на учениците или студентите.

Системата е документирана много добре. Документацията ѝ е оформена като хипертекстов документ, като описанието на всички предоставени на потребителя средства е съпроводено с много съдържателни примери.

MuPAD се разработва и поддържа от фирмата SciFace, Германия. Актуалната ѝ версия (за разнообразни платформи) е *MuPAD 2.5*. На посочения по-горе web-адрес е достъпен специален неин вариант, който се разпространява безплатно с безсрочен лиценз за използване от академични организации, преподаватели, ученици и студенти за некомерсиални цели.

GEONExT (<http://geonext/de>) е динамична интерактивна програмна система, базирана на JAVA. Тя е разработена в Университета в Байройт, Германия. Предназначена е за приложение в обучението на учениците и за повишаване на квалификацията на учителите по математика. Чрез използване на подходящи функции GEONExT може да се извърши експериментиране на различни подходи и проблемни постановки в обучението по математика (главно в областта на геометрията, а последната версия на системата е разширена с елементи на анализа).

Специално разработени учебни среди са посветени на теми от училищната програма в Германия, други излизат извън нейните рамки. Някои от тези среди имат имена като „Питагор“, „Геометрия на триъгълника“, „Златно сечение“, „Правилни многостени“ и др. Те подпомагат по-задълбоченото разбиране на преподавания ма-

териал. Учебните среди лесно могат да бъдат изменени, допълвани и разширявани от потребителя.

Една от особеностите на системата е следната: заедно с нагледните математически разглеждания се предоставя информация от историята на математиката и се прави връзка с други дисциплини.

GEONExT е подходяща както за илюстрация и онагледяване на преподавания материал, така и за самостоятелна работа на учениците при водещата роля на преподавателя. Достъпна е безплатна версия на системата на посочения по-горе web-адрес, като се предполага използването ѝ за некомерсиални цели.

ТІ-92 (<http://education.ti.com>) са графични калкулатори на фирмата Texas Instruments с вградената в тях СКА, много близка до Derive (<http://www.derive.com>). Тук разглеждаме едно тяхно приложение в Математическата гимназия „Баба Тонка“ в Русе – за матрично представяне на геометрични преобразования в равнината.

В тази тема се въвежда аналитично представяне на осева симетрия, централна симетрия, трансляция, ротация и хомотетия като се използват матрици. В учебното съдържание по математика за общообразователното училище не е предвидено такова поднасяне на материала. Изложеният тук подход се основава на следните съображения:

– паралелките с профил информатика в математическа гимназия „Баба Тонка“ в Русе се състоят от ученици, чиито интереси са насочени в голяма степен към използване на компютри в практиката;

– интегрирането на знанията на учениците по дисциплините алгебра, геометрия и аналитична геометрия дават възможност за разширяване на основния обем на материала по алгебра и геометрия в осми клас (и по-горните класове) с теми като: „Вектори в равнината и пространството“, „Аналитични уравнения на права в равнината“, „Линейна зависимост и независимост на вектори“, „Вектори в n -мерното пространство“, „Матрици“, „Решаване на системи линейни уравнения“ и др. Последната тема е в основния материал, в съответствие с държавните образователни изисквания за необходимия минимум от знания на всеки зрелостник. В настоящото разглеждане тя е допълнена с алгоритмизиране на намирането на решенията на система уравнения по метода на Гаус-Жордан. Обработването на матриците на разглежданите системи, както и изучаването на основни операции с матрици, правят уместно и матричното представяне на геометричните преобразования в равнината. Калкулаторите TI-92 са подходящо техническо средство за реализация на горепосочения проблем.

Важно е да се обясни на учениците мястото на разгледания подход за представяне на еднаквост на геометрични фигури. Симетрия относно Ox или Oy , симетрия относно началото на координатната система, трансляция и ротация с център началото на координатната система или хомотетия със същия център са основни преобразования. Към тях може да се сведе намирането на образа на геометричен обект при осева симетрия с ос произволна права, централна симетрия с център произволна точка, ротация с произволен център и т. н. Този начин на представяне на геометричните преобразования се оказва подходящ, в частност, за овладяване на знания за движение на обекти с различни параметри и тяхното разположение в равнината (пространството), а това е важно за разбиране и използване и на компютърната анимация.

Заклучение. Надяваме се, че представените теми ще предизвикат интерес сред участниците в семинара. Нека с общи усилия потърсим отговор на въпроса как (а не дали) да използваме системи за компютърна алгебра в часовете по математика и информатика.

Маргарита Спиридонова
Институт по Математика
и Информатика при БАН
ул. акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: mspirid@math.bas.bg

Мария Нишева-Павлова
Факултет по Математика и
Информатика, СУ „Св. Кл. Охридски“
бул. Дж. Баучер 5
1126 София
e-mail: marian@fmi.uni-sofia.bg

Даниела Николова
Институт по Математика
и Информатика при БАН
ул. акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: daniela@math.bas.bg

Боряна Куюмджиева
Математическа гимназия
„Баба Тонка“
ул. Иван Вазов, 20
7000 Русе
e-mail: liibak@ru.acad.bg

COMPUTER ALGEBRA SYSTEMS IN EDUCATION OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

M. Spiridonova, M. Nisheva-Pavlova, D. Nikolova, B. Kujumdzhieva

The computer algebra systems Mathematica and MuPAD, the GEONExT and TI-92 are briefly presented. Their use in the education of mathematics and computer science is discussed. Two our developments – one related to the Poncelet theorem and another devoted to the matrix presentation of geometric transformations in the plane, as well as their use in the classroom are considered as well.