

*МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2007*  
*MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2007*  
*Proceedings of the Thirty Sixth Spring Conference of*  
*the Union of Bulgarian Mathematicians*  
*St. Konstantin & Elena resort, Varna, April 2–6, 2007*

**ИЗ ЖИВОТА И ТВОРЧЕСТВОТО НА ЛЕОНАРД ОЙЛЕР**  
**(1707 – 1783)**  
**(ВЪВ ВРЪЗКА С 300-ГОДИШНИНАТА ОТ**  
**РОЖДЕНИЕТО МУ)**

**Стефан Радев**

Настоящият доклад е опит за кратка биография на един от най-великите учени на всички епохи – Леонард Ойлер – живял и творил през XVIII век, наричан още “век на просвещението”.



Най-старият известен портрет на Ойлер от 1737

За математическата колегия, за която е предназначен, докладът съдържа обзор на някои от най-значимите приноси на Ойлер в областта на математиката и механиката, подбрани според предпочитанията на автора като научен работник и преподавател. На това място ще цитираме извадка от тържествената реч на един авторитетен механик, какъвто е Клифорд Трусдел по повод 250-годишнината от рождението на Ойлер: “Ойлер е голямо, всеобхватно явление като Шекспир – всеки, който може да чете трудовете на единия и другия, си съставя собствена, може би истинска, макар и не пълна картина за това. В работите на Ойлер могат да се намерят най-красивите примери за всеки вид математическо мислене и е възможно

някой друг читател чрез избор на други Ойлерови изследвания да стигне до друго схващане”. (Цитатът е от българския превод на Иван Чобанов на книгата на Р. Тиле, вж. списъка на избраната литература в края на статията).

Леонард Ойлер е роден на 15 април 1707 година в гр. Базел, Швейцария. Първите си уроци по математика той получава от своя баща – пасторът Паул Ойлер – който през студентските си години в Базелския университет е слушал лекциите на знаменития Якоб Бернули. В същия университет през 1720 г. постъпва и Ойлер, където през 1723 г. завършва философския факултет, а една година по-късно след първата си публична реч, получава титлата “магистър на изкуствата”, едновременно с най-малкия син на Якоб Бернули – Йохан (II) Бернули. Още през тези години Ойлер проявява завидни способности, изучавайки теология, философия, старогръцки и еврейски език. Следвайки своето призвание той едновременно слуша лекциите по математика на един от най-видните живи математици по това време – Йохан Бернули – по-малък брат на вече споменатия по-горе Якоб. Математическият талант на младия Ойлер привлича вниманието на неговия преподавател, по чиято препоръка младежът изучава редица класически трудове по математика и под чието ръководство решава трудни задачи. В този период 18-годишният Ойлер отпечатва първата си статия върху “Построяване на изохронни линии в произволна съпротивителна среда”, която както ще видим по-долу, е първият предвестник на неговото бъдещо вариационно смятане.

След неуспешен опит да участва в конкурс за професор по физика на Базелския университет, 20-годишният Ойлер напуска родината си, за да не я види никога повече. Така започва първият 14-годишен период от работата му в наскоро преди това откритата Петербургска академия на науките, идеята за която дължим на Петър I (Велики). Сред първите академици в Академията вече работят неговите приятели Даниел (като професор по физиология) и Николай (II) Бернули (като професор по математика), на които той дължи поканата си за мястото на адюнкт по физиология, с идеята да приложи математическите си познания в медицината. Като резултат от господстващата в Академията свобода в избора на насоката на изследванията, Ойлер от самото начало получава възможност да се посвети на математиката. Много скоро след това (през 1731 г.) Ойлер е назначен за професор по физика (а значи и за член на Академията), а през 1733 г. – за професор по математика на мястото на Даниел Бернули. В Академията младият Ойлер попада в колектив от утвърдени учени с общи интереси и стремежи. Тук той има възможност да беседва с Даниел Бернули, посветил се на математиката и хидродинамиката, сприятелява се с Христиан Голдбах, занимаващ се с математически анализ и теория на числата, към която теория той насочва интересите на Ойлер за самостоятелни изследвания. (Нека споменем, че в едно от своите писма до Ойлер Голдбах формулира един до днес още не решен напълно проблем на теорията на числата, носещ неговото име). Ето какво пише академикът Ойлер в своя отчет от 28 август 1737 г. до тогавашния президент на Академията Корф:

“Съгласно условията на своята служба в императорската академия на науките:  
1. Да посещавам заседанието на Конференцията (по съвременната терминология – Общ семинар на академиците), което аз усърдно правя, като имам винаги готовност да прочета свое съчинение; 2. Да четя лекции на студентите по висша математика, което аз правя винаги, когато постъпят студенти, интересувани се от въпросния

предмет; 3. Също така на мен е възложено да участвам в работата по географската карта на Русия и в това направление аз се трудя доколкото ми позволяват силите и другите занятия.

Колкото до останалите ми настоящи и бъдещи занимания, то понастоящем аз работя над учебник по аритметика, който ще се използва в тукашната гимназия. Освен това имам намерение . . . да доведе докрай вече започнати мои съчинения, в които става дума за музика, статика, анализ на безкрайно малки и движение на телата във водата”.

Някои от трудовете на Ойлер през първия Петербургски период (около 50 отпечатани от 80 подготвени за печат) продължават или завършават изследвания, започнати в Базелския университет. Замисленото още там изложение на механиката на материална точка с методите на анализа на Лайбниц, Ойлер осъществява в Петербург с двумното съчинение “Механика или наука за движението, изложена аналитично”. Подготвеният и (впоследствие отпечатан) в Петербург трактат “Наука за корабоплаването” е продължение на Ойлеровите резултати по статика и динамика на плаващо тяло, с които той от Базел участва в конкурс на Парижката академия на науките за водещ до най-голяма устойчивост начин за разположение на корабните мачти. В същото време повечето от Петербургските изследвания касаят нови направления, в които неговите предшественици са направили само първите крачки. Това се отнася до решението на редица задачи на вариационното смятане, обикновените диференциални уравнения, специалните функции, теорията на числата, топологията и други. Тук Ойлер изучава и нови проблеми, които стават предмет на неговите изследвания през следващите десетилетия.

През 1734 год. Ойлер се оженва за Катрина Гзел, дъщеря на швейцарския живописец и художник на академията Георг Гзел. Двамата му сина Йохан Албрехт, математик и механик, и Карл – лекар, впоследствие също стават академици в Петербургската академия. Неустойчивата политическа обстановка около руския престол през периода 1740-1741 г. и постепенното влошаване на положението на Академията, започнало след 1730 г. принуждават Ойлер да приеме поканата на пруския крал Фридрих II и да се премести в Берлин в реформиращото се Берлинско общество на науките, основано по идея на Лайбниц през 1700 г. С голяма признателност Ойлер си спомня за времето, прекарано в Петербургската академия и ролята, която тя е изиграла в неговия живот. Това личи от писмото, което той след осем годишно пребиваване в Германия, пише в Петербург:

“Аз и всички останали, имали щастието да служат в руската императорска академия, трябва да признаем, че за всичко, което сме сега, ние сме задължени на онези благоприятни условия, в които се намирахме . . . . Когато неотдавна, Негово Кралско Величество Фридрих II ме попита, къде съм научил всичко това, което аз зная, аз в съответствие с истината отговорих, че го дължа на пребиваването си в Петербургската академия”.

В Берлин, където Ойлер остава до 1766 год. на него му се налага да се занимава с широк кръг дейности като се започне от значителни организационни задължения и разнообразни лични поръчения на краля и се стигне до многопосочни и с нарастваща интензивност научни изследвания. В Берлинската академия на науките и литературата, създадена през 1744 год. на мястото на вече споменатото Общество на науките, Ойлер е назначен за директор на математическия отдел и за член

на директората ѝ. Но поради честите отсъствия на нейния президент, известният френски учен Мопертюи, Ойлер фактически изпълнява неговите функции.

В творческо отношение Берлинският период на Ойлер е един от най-плодотворните. Това в най-голяма степен се отнася до неговите приноси в изграждането на механиката на твърдото тяло и хидромеханиката на идеалните (невискозните) флуиди. Още в излезлия през 1744 г. учебник “Теория на планетите и кометите” се съдържа ново изложение на механиката на материална точка, както и резултати върху кинематиката на абсолютно твърдо тяло и елементи на теорията на инерчните моменти. В една своя работа от 1750 год., озаглавена “Откриване на един нов принцип на механиката” Ойлер формулира закона за количеството на движение в близка до днешната му аналитична формулировка. С помощта на този нов принцип Ойлер извежда общи уравнения за въртенето на твърдо тяло около неподвижна точка, несполучливо записани в неподвижна координатна система, което ги прави неудобни за по-нататъшен анализ. В трактата си “Теория на движението на твърдите тела” (1765), който Ойлер счита за трети том на споменатата по-горе “Механика”, той излага динамичните уравнения на движение на твърдо тяло около масовия му център, записани вече спрямо главните инерчни оси:

$$A \frac{dp}{dt} - (B - C) qr = P,$$

$$B \frac{dq}{dt} - (C - A) rp = Q,$$

$$C \frac{dr}{dt} - (A - B) pq = R,$$

където  $A$ ,  $B$ ,  $C$  са главните инерчни моменти на тялото,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  – проекциите на моменталната ъглова скорост върху (подвижните) главни инерчни оси, а  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  – сумарните моменти на външните сили спрямо тези оси. Тук Ойлер изследва и първия знаменит случай на интегрируемост на своите динамични уравнения, съответстващ на тяло, движещо се по инерция около неподвижната точка (нулеви десни части).

Десет години по-късно той прави заключителната крачка в изграждането на динамиката на свободно твърдо тяло като към закона за количеството на движение добавя закона за кинетичния момент. В своите изследвания по история на механиката Клифорд Трусдел счита споменатата идея на Ойлер за първата в историята на механиката едновременна поява на двата закона в качеството им на “фундаментални, общи и независими закони на механиката за всички видове тела”.

През 1755 год. пред Берлинската академия Ойлер докладва своето съчинение “Общи принципи на движението на течностите”, публикувано по-късно в мемоарите на академията. Тук с помощта на обичайното днес разглеждане на елементарен течен паралелепипед е изведено уравнението на непрекъснатостта

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0,$$

както и уравненията на движение на идеален (невискозен) флуид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

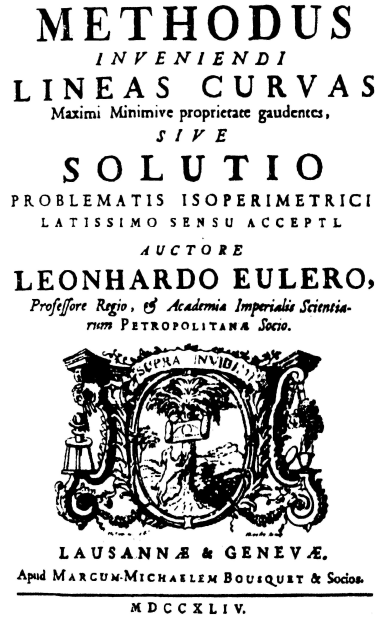
$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z},$$

които днес заслужено се наричат уравнения на Ойлер. (В горните формули с  $\rho$  е означена плътността, с  $p$  – налягането, с  $u, v, w$  – проекциите на скоростта в декартова координатна система  $Oxyz$ ). В същия мемоар е изведен и един интеграл на уравненията на движение за случая на потенциални (безвихрови) течения, който в съвременната литература е известен повече като интеграл на Коши-Лагранж:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t),$$

където  $\varphi$  е потенциалът на скоростите, а  $f(t)$  – произволна функция, зависеща само от времето. (Във връзка с използваното в литературата име на горния интеграл ще добавим, че задаването на движението на произволен флуиден обем чрез координатите на началните положения на неговите частици е споменато от Ойлер в писмо до Лагранж, но и този подход остава в литературата като Лагранжов).



Титулна страница на Ойлеровия трактат по вариационно смятане (1744)

В Берлин Ойлер започва осъществяването на едно грандиозно начинание, което той обмисля дълги години преди това. Натрупаните до средата на XVIII век математически знания (главно в областта на математическия анализ) се нуждаели от систематизация, уточняване на основните понятия и изясняване на взаимните връзки между разхвърляните в отделни съчинения резултати. Като начало през 1744 г. Ойлер публикува своя знаменит трактат, посветен на вариационното смятане и озаглавен “Метод за намиране на криви, притежаващи максимални и минимални свойства или решение на изопериметричния проблем, схващан в широк смисъл”. В този труд е изведено необходимо условие за екстремум  $y(x)$  на определения интеграл (сега го наричаме функционал)

$$J = \int_a^b F(x, y, y') dx; \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

До това условие Ойлер достига чрез метод, който днес е известен с неговото име и продължава да се прилага за числено интегриране на обикновени диференциални уравнения (наричан още метод на начупената линия). Самото необходимо условие е получено също във вид на обикновено диференциално уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

и днес е известно като уравнение на Ойлер-Лагранж поради приноса на последния за строгото му извеждане. Съчинението съдържа и голям брой примери (около 200), за които Якоби отбелязва: “Винаги можем да смятаме, че сме постигнали напредък, когато към примерите на Ойлер добавим някой наистина нов.” Сред примерите, в частност, е вече споменатата първа публикация на Ойлер върху брахистохроната, определена като крива на най-бързото спускане. В същия трактат е изложен и породилният многобройни дискусии принцип на най-малкото действие на Мопертюи (в съвременната терминология принцип на Мопертюи-Лагранж)

$$W = \int_{t_1}^{t_2} mv^2 dt,$$

в изясняването на областта на приложимост на който Ойлер има решаващо значение. (В горната формула действието по Лагранж е означено с  $W$ , а масата и скоростта на материалната точка с  $m$  и  $v$ ). Нека допълним, че в трактата, както и в следващи работи на Ойлер, са заложени основите на теорията на еластичната устойчивост; в частност, тук е изложена знаменитата задача на Ойлер за определяне на критичното аксиално натоварване на вертикална колона. Тънкият познавач на вариационното смятане Константин Каратеодори определя Ойлеровото “Вариационно смятане” като “едно от най-красивите математически творения, създавани някога”.

Едновременно с написването на този трактат Ойлер работи върху многотомен труд, с който цели да обхване всички раздели на математическия анализ. Така последователно се появяват двата тома на “Увод в анализа на безкрайно малките” (1748

г.), еднотомото “Диференциално смятане” (1755 г.) и трите тома на “Интегрално смятане” (1768–1770 г.). Не е възможно дори кратко да се опише богатството от идеи, съдържащи се в тези съчинения. Те са изиграли изключително голяма роля в математиката, за което можем да съдим от наставленията на Лаплас към своите ученици: “Четете, четете Ойлер, той е учител на всички нас”.

Все пак, нека споменем по няколко думи за горните съчинения. В самото начало на “Увод в анализа” Ойлер за пръв път отчетливо формулира своето виждане, че математическият анализ има за предмет изучаването на “променливите величини и техните функции”. Също тук той извежда важни свойства на комплексните функции  $e^z$ ,  $\ln z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$  и, в частност, своята знаменита формула

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

чието следствие

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Феликс Клайн счита за едно от най-интересните равенства в математиката.

Във втория трактат “Диференциално смятане” Ойлер доказва известната теорема за еднородните функции, извежда необходимо условие за съществуване на пълен диференциал на функции на две променливи, извежда формулата, известна днес като формула на Ойлер-Маклорен, свързваща парциалните суми на един ред с интеграла и производните от общия му член.

В тритомното съчинение “Интегрално смятане”, започнато в Берлин, но довършено в Петербург, Ойлер на първо място излага теорията на интегрирането, изградена върху понятието за интеграл, дефиниран като примитивна на дадена функция. Наред с това, обаче, той излага разнообразни методи на интегриране на обикновени диференциални уравнения от първи и по-висок ред, както и на уравнения в частни производни. В частност тук намираме класическия Ойлеров резултат за свеждане на интегрирането на линейно хомогенно диференциално уравнение към решаване на съответното характеристично алгебрично уравнение.

Теорията на числата заема особено място в творчеството на Ойлер, а постиженията му само в тази област са достатъчни да обезсмъртят името му. Съгласно мнението на внеслия немалък принос в тази област руски математик Пьотр Чебишов “Ойлер полага началото на всички изследвания, съставляващи общата теория на числата”. Преди Ойлер с проблеми от теорията на числата се занимава гениалният математик на XVII век Пиер Ферма, който формулира редица важни теореми в тази област, за повечето от които негови доказателства не са открити. С търсенето на доказателства на твърденията на Ферма се занимават математиците и преди Ойлер, но разглеждайки ги като отделни несвързани проблеми. А всъщност, по мнението пак на Чебишов “е било необходимо създаването на нови методи, откриването на нови отправни точки, с една дума, създаването на нова наука. Това е било направено от Ойлер”.

Връщайки се към хронологията на житейския път на Ойлер, достигаем до последните години на неговия берлински период 1762–1766 г. От 1753 г., след отпътуването на Мопертюи от Берлин, Ойлер фактически изпълнява функциите на президент на Берлинската академия, но влиянието му върху управлението ѝ постепенно

намалява (особено след смъртта на Мопертюи през 1759 г.), поради все по-честите намеси в неговата работа на пруския крал Фридрих II. След няколко молби за напускане и намесата на руското правителство, Ойлер получава разрешение да замине за Петербург, където той пристига на 28 юли 1766 г. На мястото на Ойлер в Берлин по препоръка на Даламбер е поканен Лагранж, който от 1766 г. до 1787 г. е президент на Берлинската академия на науките.

В Петербург големият учен е приет с почести лично от наскоро възкачилата се на руския престол императрица Екатерина II като едновременно му е осигурена щедра финансова подкрепа. Вторият петербургски период на Ойлер е помрачен от две събития: след кратко заболяване той ослепява почти напълно и със здравето си око, а през 1773 г. умира жена му.

Самият Ойлер почива внезапно десет години по-късно – на 5 юни 1783 г. Първоначално той е погребан в лютеранското Смоленско гробище на Василевския остров, а впоследствие костите му и надгробният камък са пренесени недалеч от гроба на Ломоносов в некропола на Александро-Невския манастир в Ленинград, днешен Санкт Петербург.



Надгробният камък на Л. Ойлер

За пълнота нека отбележим някои от трудовете на Ойлер, публикувани през последния период от неговото творчество. Това са преди всичко съчинения, започнати в Берлин, но продължени в Петербург и подготвени за печат от неговите секретари-сътрудници, сред които синът му Йохан Албрехт, учениците му Михаил Головин (племенник на Ломоносов), Николай Фус (зет на Йохан) и други. От споменатите досега ще отбележим тритомната “Диоптрика”, която се превръща в решаваща предпоставка за усъвършенстване техниката на изготвяне на телескопи и микроскопи. За кратък интервал от време в три тома Ойлер публикува (първоначално на френски език) “Писма до една немска принцеса по различни въпроси на физиката и философията”. Написани в началото на 60-те години на XVIII век тези писма са едно популярно изложение на основни въпроси на физиката, философията, логиката, етиката, теологията и други. Дълги години те се ползват с изключителна



популярност. Нека добавим и руския превод на “Увод в алгебрата”, чийто оригинал на немски език Ойлер нарочно диктува на своя немски прислужник, по професия шивач. Френското издание на този труд, излязло с коментарите на Лагранж става значителна крачка в развитието на диофантовия анализ. В самата Русия дълги години този труд служи за основа на гимназиалните учебници по алгебра.

За заключение нека предоставим думата на Николай Фус, който освен близък сътрудник на Ойлер, е вече академик на Петербургската академия. Своята прощална реч за Леонард Ойлер, произнесена на 3 ноември 1783 год. пред Общото събрание на Петербургската академия, той завършва с думите “Такива бяха трудовете на господин Ойлер, такива са и неговите права на безсмъртие. Неговото име може да загине само със самата наука”.

\* \* \*

За живота и творчеството на Леонард Ойлер (включващо над 850 съчинения, измежду които над 20 тома обемисти монографии) има публикувани многобройни специализирани изследвания, както и редица сборници, посветени на негови годишнини. По-долу сме посочили някои от тях, достъпни в библиотечната мрежа на Българска академия на науките.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] И. Г. Башмакова, А. П. Юшкевич. Леонард Эйлер. Историко-математические исследования, вып. VII. Гос. изд. Техничко-теоретической литературы, Москва, 1954, 453–512.
- [2] Н. Обрешков, Й. Дуйчев. Леонард Ойлер – живот и творчество. Държ. изд-во “Народна просвета”, София, 1958.
- [3] М. А. Лаврентьев и др. Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения, представленных АН СССР. Изд. АН СССР, Москва, 1958.
- [4] П. Тиле. Леонард Ойлер. Н. И., София, 1985.
- [5] Н. Н. Боголюбов и др. Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. Москва, Наука, 1988.

Институт по механика  
Българска академия на науките  
Ул. Акад. Г. Бончев, бл. 4  
1113 София  
e-mail: stradev@imbm.bas.bg