МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2007
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2007
Proceedings of the Thirty Sixth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
St. Konstantin & Elena resort, Varna, April 2–6, 2007

230 ГОДИНИ ОТ РОЖДЕНИЕТО НА ВЕЛИКИЯ НЕМСКИ МАТЕМАТИК КАРЛ ФРИДРИХ ГАУС (1777–1855)

Петър Р. Попиванов

През април 2007 г. се навършват 230 години от рождението на К.Ф. Гаус – един от най-великите математици, изиграл огромна роля за развитието на математиката през XIX и XX век. Целта на тази статия е да представи Гаус с някои от неговите големи открития, често на равнището на впечатляващи миниатюри, да разкаже за някои негови прозрения с които е изпреварил с десетилетия своите съвременници, а в общи линии и еволюционния път в развитието на математиката. Съзнателно съм отхвърлил представянето на Гаус по биографичен или белетристичен начин.

Нека, чрез внимателно извлечените и дозирани откъси от неговото огромно научно творчество, читателят да направи сам съответните изводи. Разбира се, че охарактеризирането на постиженията на такъв разностранен гений, работил практически във всички области на математиката, е непосилна задача. Надявам се на разбирането на читателя, че е невъзможно да се обхване необятното. През цялото време на подготовката на тази статия се водих от принципа – само някои неща, но по-хубави, по-ясни, по-релефни, по-представителни за Гаусовия ум. Статията е разделена на 5 части, съобразно съответните приноси.

1. Гаус, теорията на числата и алгебрата.

1.1. Сравненията (означенията) на целите числа са въведени от Гаус. Напомняме, че ако $p, a, b \in \mathbb{Z}$, $p \neq 0$, то $a \equiv b (\mathrm{mod}\ p)$ ако p дели $a - b$.

Ще казваме, че a е квадратичен остатък по модул $m \in \mathbb{N}$, ако сравнението $x^2 \equiv a (\mathrm{mod}\ m)$, $a \in \mathbb{Z}$ притежава решение $x \in \mathbb{Z}$. В противен случай a наричаме квадратичен неостатък по модул m.

През м. март 1795 г. Гаус открива "експериментално" следната теорема, която преди него е доказана от Ойлер без Гаус да знае това.

Теорема 1. *Числото* -1 *е квадратичен остатък на всички прости числа от вида* $4k + 1$ *и квадратичен неостатък на всички прости числа от вида* $4k + 3$.

Очевидно всички прости числа, с изключение на 2, се намират в групите $4k + 1$ и $4k + 3$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. 2 е единственото четно просто число.

Важно следствие от горната теорема е, че едно естествено число се представя като сума от квадрати на цели числа точно тогава, когато числото не съдържа прости делители от вида $4k+3$ в нечетна степен.

От друга страна още Лагранж доказа, че всяко естествено число се представя като сума от квадратите на 4 цели числа. Толкова по-интересно е да се знае, че съгласно един резултат на Гаус всяко естествено число, отлично от числата от вида $4^a(8k-1)$, $a \geq 0$, $a \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ се представя като сума от 3 квадрата на цели числа.

Ще пристъпим сега към формулирането на знаменития Гаусов закон за реципрочност на квадратичните остатъци. И така, нека m е нечетно просто число и $(a, m) = 1$, $a \in \mathbb{Z}$. Льожандър дефинира символа $\left(\frac{a}{m}\right) = 1$, когато a е квадратичен остатък по модул m и $\left(\frac{a}{m}\right) = -1$ в противния случай. Очевидно $\left(\frac{a}{m}\right)$ има смисъл и при $a < 0$. Тогава законът за реципрочност на квадратичните остатъци се записва по следния начин:

$$\left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{m}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}\cdot\frac{m-1}{2}}, \tag{1}$$

където $a > 2, m > 2$ и $a \neq m$ са прости числа. Това е едно от най-добрите постижения на Гаус, формулирано и доказано от него по друг еквивалентен начин за пръв път през 1796 г. По-късно Гаус намира 7 други доказателства на (1).

Горният резултат е бил известен още на Ойлер и Льожандър, които го откриват емпирично, но го доказват само за някои специални стойности на a. Ето някои прости следствия от (1): $\left(\frac{a}{m}\right) = \left(\frac{m}{a}\right)$ ако поне едно от простите числа a и m е от вида $4k+1$ и $\left(\frac{a}{m}\right) = -\left(\frac{m}{a}\right)$ в противния случай. Ойлер пресметна за пръв път $\left(\frac{-1}{p}\right)$ при p – просто число (вж по-горе Теорема 1). Доказателството на (1) се базира на една дълбока Лема на Гаус [6]. От нея непосредствено се вижда, че за всяко просто число $m > 2$ символът на Льожандър $\left(\frac{2}{m}\right) = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}$ и, следователно, $\left(\frac{2}{m}\right) = 1$ при $m = \pm 1 (\mathrm{mod}\ 8)$, докато $\left(\frac{2}{m}\right) = -1$ при $m = \pm 3 (\mathrm{mod}\ 8)$.

Формулата (1) би могла да се интерпретира и така. Нека $a \neq m$ са прости числа, $a, m > 2$. Тогава сравненията $x^2 \equiv a (\mathrm{mod}\ m)$, $y^2 \equiv m (\mathrm{mod}\ a)$ са решими или нерешими едновременно, ако нямаме $a \equiv m \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$. От тук идва и името закон за реципрочност на квадратичните остатъци.

Няма да се спирам на Гаусовата теория на квадратичните форми поради сложността ѝ за прагматичните цели на тази статия.

1.2. Ето няколко думи за приноса на Гаус за намирането на закона за разпределение на простите числа 2, 3, 5, … сред естествените числа. И така, нека $x > 1$ е дадено число. Ще означаваме с $\pi(x)$ броя на простите числа p, за които $1 < p \leq x$. След продължителни числови експерименти Гаус стига до хипотезата, че

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x) : \frac{x}{\ln x} = 1, \quad \text{т.е.} \quad \pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}, x \gg 1. \tag{2}$$

Тази хипотеза при Льожандър (1798 г.) има вида $\pi(x) \approx \dfrac{x}{\ln x - 1,08366}$, $x \gg 1$.

Валидността на асимптотичния закон (2) беше строго доказана през 1896 г. независимо един от друг от Адамар и Вале-Пусен. Доказателството им е тежко, аналитично и използва предишни резултати на Чебишов. През 1980 г. се появи съвсем елементарно доказателство на (2) от Нюман, което беше уточнено от Дон Цагир през 1997 г. Сега вече разполагаме с доказателство, ясно и достъпно и за студентите от III курс на математическите факултети. Такова доказателство беше предложено и на 32 пролетна конференция на СМБ. Ето и едно непосредствено следствие от (2). Да означим с p_n n-тото просто число. Тогава $p_n \sim n \ln n$, $n \gg 1$.

Как стоят нещата с основния асимптотичен закон в края на XX и началото на XXI век? Дефинираме интегралния логаритъм по стандартен начин:

$$\text{li } x = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} + \ldots + (r-1)! \frac{x}{\ln^r x} + O\left(\frac{x}{\ln^{r+1} x}\right),$$

$x \to \infty$ и $r \in \mathbb{N}$ – произволно.

Виноградов и негови сътрудници дават следното уточнение на (2) (оценка за остатъка): $\pi(x) = \text{ li } x + O(x \exp(-a \ln^{3/5} x \ln^{-1/5} \ln x))$, $x \to \infty$, $a = \text{const} > 0$. Ако е вярна знаменитата хипотеза на Риман за разположението на нулите на $\zeta(z)$ върху правата $\Im z = 1/2$, то за остатъка би се получил следният блестящ резултат (сравни с предидущия):

$$\pi(x) = \text{ li } x + O(\sqrt{x} \ln x), \ x \to \infty.$$

1.3. Един от ранните приноси на Гаус е свързан с делението на окръжността на равни части или все едно с построяването на правилните многоъгълници. И така, ще работим в комплексната равнина. Нека $x^n = 1$. Тогава корените на това уравнение се дават с формулата на Моавър $x_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Очевидно точките x_k са върховете на правилен многоъгълник, вписан в единичната окръжност с център в началото. Така заключаваме, че построяването с пергел и линийка на правилен n-ъгълник е равносилно на построяването на точките x_k със същите средства. В учебниците по висша алгебра се доказва, че една точка $x \in \mathbb{R}^2$ е построима с линийка и пергел точно когато нейните координати се "изразяват с квадратни радикали". Гаус намира през 1796 г., че $\cos\frac{2\pi}{17} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$. Следователно е възможно построяването на правилен 17-ъгълник само с пергел и линийка. По-общо, Гаус доказва следната теорема: Правилен n-ъгълник е построим с линийка и пергел точно тогава, когато $n = 2^k p_1 \ldots p_m$, където $k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ а $p_1, \ldots, p_m$ са различни помежду си прости числа от вида $p = 2^{2^s} + 1$, $s \geq 0$, $s \in \mathbb{Z}$.

Заключение. С пергел и линийка можем да построим правилни n-ъгълници за $n = 3, 4, 5, \ldots, 17, \ldots, 257, \ldots$, но не можем да построим правилен многоъгълник при $n = 7, 9, 11, \ldots$.

Безспорно Гаус е предтеча на Галоа.

1.4. През 1799 г. Гаус доказва в докторската си дисертация (представена в Хелмщедския университет) основната теорема на алгебрата. Според "Историята на математиката" на Бурбаки това доказателство представлява първото приложение на топологията в анализа. По-късно Гаус предлага още 3 доказателства на тази теорема, две от които са съществено различни по идея от първото.

1.5. Ще приведа сега една Гаусова миниатюра, която е безспорен принос към теорията на аритметичните функции [7]. И така, функцията $r(n)$, $n \in \mathbb{N}$ определяме като броя на представянията на естественото число n като сума от 2 квадрата, т.е. $r(n)$ е равно на броя на целочислените решения на уравнението $x^2 + y^2 = n$, $x, y \in \mathbb{Z}$. Считаме за различни решенията, които се различават по знак или по наредба. Например, $r(1) = 4$, защото $1 = (\pm 1)^2 + 0 = 0 + (\pm 1)^2$. По-горе споменахме, че $r(n) = 0$, ако простото число $n = 4k+3$. Знае се, че простите числа от този вид са безбройно много. Това наблюдение мотивира въвеждането на аритметичната функция $R(N) = \sum_1^N r(n)$, $r(0) = 1$, т.е. $R(N)$ представлява броя на целочислените точки /точки с целочислени координати/, които са разположени вътре и по границата на кръга $x^2 + y^2 = N$, N - естествено число.

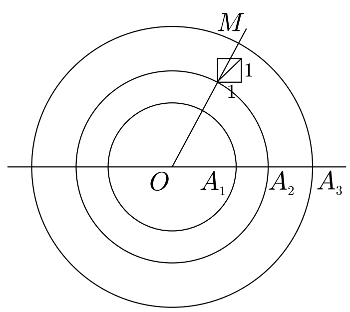
Гаус е доказал, че $R(N) = \pi N + O(\sqrt{N})$, $N \to \infty$.

Ето и елегантното доказателство на горната асимптотична формула.

Целочислените точки $A(m, n)$ ще разположим по върховете на квадратите с единична дължина на страната в $\mathbb{R}^2$ и значи с диагонал $\sqrt{2}$. Ще считаме, че $A(m, n)$ се намера в левия долен ъгъл на съответния квадрат и ще го броим само веднъж. Тогава числото $R(N)$ е равно на сумата от лицата на тези квадрати. По-надолу навсякъде ще означаваме с $K_R(P)$ кълбото (кръга) с център в т. P и радиус R, а със $S_R(P)$ съответната сфера (окръжност). Ако $P = O$ ще пишем по-кратко K_R, респективно S_R.

От геометрични съображения е ясно (виж фиг. 1), че $\mu(K_{N-\sqrt{2}}) < R(N) < \mu(K_{N+\sqrt{2}})$, където $N > \sqrt{2}$ и μ означава лицето на съответния кръг. Следователно при $N \geq 3$

$$\pi(\sqrt{N} - \sqrt{2})^2 < R(N) < \pi(\sqrt{N} + \sqrt{2})^2 \Rightarrow R(N) = \pi N + O(\sqrt{N}), \quad N \to \infty.$$



Фиг. 1

2. Гаус и теорията на вероятностите; изчисляване на грешките.

2.1. Гаус открива закона за най-малките квадрати през 1795 г. Ето накратко идеята му.

Нека искаме да измерим величината a. След n измервания получаваме числата $a_1, \ldots, a_n$. Гаус предлага за мярка на точност на тези измервания да се вземе квадратичното отклонение $\sum_{\nu=1}^{n} (a - a_\nu)^2$. Тъй като в общия случай величината a е неизвестна, Гаус препоръчва за a (по-точно за приближение на a) да вземем онази стойност на x за която квадратният тричлен $f(x) = \sum_{\nu=1}^{n}(x - a_\nu)^2$, $x \in \mathbb{R}^1$ има минимум. С други думи търсим онова x_0 за което $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$. Очевидно $x_0 = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$. Така намираме добре известното правило за средното аритметично.

2.2. Гаус предлага в свое съчинение, публикувано през 1809 г., закона за нормалното разпределение в теорията на вероятностите. И така, нека истинското значение на наблюдаваната величина е a и вероятностната плътност да се сбъдне резултатът x е $\varphi(x - a)$. Тогава се предполага, че за всяко n и всички измервания $x_1, \ldots, x_n$ съвместната вероятностна плътност $\varphi(x_1 - a), \varphi(x_2 - a), \ldots, \varphi(x_n - a)$ достига минимума си като функция на a при $a = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu$ (сравни с метода на най-малките квадрати). От току-що формулирания принцип се получава, че функцията $\frac{\varphi'(x)}{x\varphi(x)}$ не зависи от x и следователно

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}, \; h = \text{const} > 0, \tag{3}$$

($\frac{\varphi'(x)}{x\varphi(x)} = \text{const}$ е обикновено диференциално уравнение с разделени променливи). По този начин се получава т.н. нормаално разпределение с плътност (3).

3. Гаус и анализа (вкл. диференциалните уравнения).

3.1. Ще започна с един важен принос на Гаус в теорията на редовете и в диференциалните уравнения. През 1812 г. той установява признак за сходимост на числови редове с положителни членове и удачно го използва при изследване на сходимостта на хипергеометричния ред. Името "хипергеометричен" идва от Пфаф. Ойлер също е изучавал този ред, но Гаус го овладява с първото пълноценно изучаване на сходимостта му включително в крайните точки на интервала на сходимост. С модерни означения хипергеометричният ред се записва така:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} z^n, \tag{4}$$

където α, β, γ са константи и $\gamma \neq \{0, -1, -2, \ldots\}$. Редът (4) е сходящ при $|z| < 1$. Щом $\Re(\gamma - \alpha - \beta) > 0$, то (4) е сходящ и при $|z| = 1$. Тогава е валидна една забележителна формула на Гаус, свързваща F и Ойлеровата Γ функция:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}.$$

В математическата физика се среща хипергеометричното уравнение на Гаус, въведено през 1812 г., което е било изследвано по-рано и от Ойлер:

$$z(z-1)w'' + [(\alpha + \beta + 1)z - \gamma]w' + \alpha\beta w = 0. \tag{5}$$

За простота ще предполагаме, че γ не е цяло число. Тогава общото решение на линейното ОДУ (5) се изразява чрез две хипергеометрични функции с параметри α, β, γ и респективно $\alpha - \gamma + 1$, $\beta - \gamma + 1$, $2 - \gamma$.

На многочислените изследвания върху F не се спираме. Ще споменем само че чрез тези си резултати Гаус е безспорно основоположник на аналитичната теория на ОДУ.

3.2. Една проста наглед формула, свързваща n-кратните и $(n-1)$-кратните интеграли (интеграли върху повърхнина), е т.н. формула на Гаус-Остроградски. Тя е установена от Гаус през 1813 г. за $n = 3$ и доказана от Остроградски в многомерния случай $n \geq 4$. В по-модерна форма тя изглежда така:

Нека $G \subset \mathbb{R}^n$ е ограничена област с частично гладка граница Γ и $p_i(x) \in C(\overline{G})$, където $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\dfrac{\partial p_i}{\partial x_i} \in C(G)$. Тогава,

$$\int_G \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial x_i}\, dx = \int_\Gamma \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \cos(n, x_i)\, dS. \tag{6}$$

Във формулата (6) n означава единичната външна нормала към Γ в т. $x \in \Gamma$, dS е лицевият елемент на Γ, докато dx е елементът на обема.

Приложенията на (6) в Анализа и ЧДУ са многобройни и важни. За да обоснова тези си думи, ще се спра само на две от тях: Теоремата на Гаус за средното аритметично на хармоничните функции и пресмятането на потенциала от двоен слой с плътност 1 върху затворена C^2 повърхнина (това е т.н. интеграл на Гаус).

а) Формула на Гаус за средното аритметично на хармонична функция. За простота ще работим само при $n = 3$. Функцията $u(P)$, $P = (x_1, x_2, x_3)$, наричаме хармонична в G, ако $u \in C^2(G)$ и $\Delta u(P) = 0$, $\forall P \in G$, където $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ е Лапласовият оператор. Едно елементарно приложение на формулата на Гаус (6) ни учи, че за всяка подобласт $G_1 \subset G$ с частично гладка граница σ (повърхнина в $\mathbb{R}^3$), такава че $\overline{G}_1 \subset G$ е валидна формулата $\displaystyle\int_{G_1} \Delta u\, dx = \int_\sigma \frac{\partial u}{\partial n}\, dS$ и, следователно, щом u е хармонична в G,

$$\int_\sigma \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0, \tag{7}$$

където n е външната нормала към G_1 в точките на σ. Формулата (7) е установена от Гаус. Нека сега затвореното кълбо $K_R(P_0) \subset G$ (напомняме, че $K_R(P_0)$ е кълбо с център в т. P_0 и радиус $R > 0$, докато $S_R(P_0)$ е границата му). Въз основа на (7) намираме, че за всяко $0 < r \leq R$ интегралът $\displaystyle\int_{S_r(P_0)} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0$. Тъй като външната нормала към сферата е разположена по нейния радиус от последната формула имаме, че $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\partial u}{\partial r}(P_0 + rz)\, dz = 0$, където $z = (z_1, z_2, z_3)$ описва единичната сфера в $\mathbb{R}^3$, а $S_r(P_0) = \{P = P_0 + rz, |z| = 1\}$. Интегрираме по r току що полученото тъждество от 0 до R и намираме, че

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R(P_0)} u(P)\, dS. \tag{8}$$

Формулата (8) носи името формула на Гаус за средното аритметично на хармоничните функции, защото частното от интеграла от u по сферата и лицето на сферата ни дават стойността на u в центъра на сферата. От тук до принципа за максимума за хармоничните функции има само една стандартна стъпка.

б) Добре известно е [8], че решенията на граничните задачи на Дирихле и Нойман за уравнението на Лаплас се редуцират до намирането на плътност на потенциали от прост и двоен слой върху гладка затворена повърхнина Γ.

Напомняме на читателя, че интегралите от вида

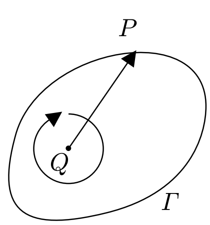
$$\int_\Gamma \frac{f(P)}{r(P,Q)}\, dS_P, \quad \int_\Gamma g(P) \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r(P,Q)}\right) dS_P$$

се наричат потенциали от прост, респективно двоен слой с плътности $f, g \in C(\Gamma)$. В горните интеграли интегрираме по променливата P, S_P е лицевият елемент относно P, n_P е външната нормала към Γ в т. $P \in \Gamma$, $Q = (\xi, \eta, \zeta)$ е параметър и $r(P,Q)$ е евклидовото разстояние между P и Q. Лесно се вижда, че $\Delta\left(\frac{1}{r(P,Q)}\right) = 0$ при $P \neq Q$, $P = (x_1, x_2, x_3)$.

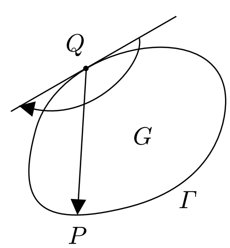
Своеобразен ключ към основните въпроси от теорията на потенциала се дава от следния интеграл на Гаус:

$$w_0(Q) = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r(P,Q)}\right) dS_P \quad (\text{ т.е. } g \equiv 1). \tag{9}$$

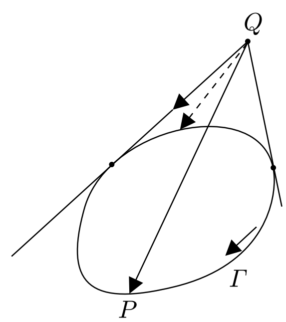
Гаус предлага една изключително полезна геометрична интерпретация на (9): $w_0(Q)$ е телесният ъгъл, под който се вижда областта G от точката Q. За да опростим до максимум разглежданията и съответните геометрични обяснения, ще работим само в $\mathbb{R}^2$, т.е. $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$. Тогава потенциалът от двоен слой с плътност 1 има вида $w_1(Q) = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r(P,Q)}\right) dS_P$, $P = (x_1, x_2)$, $Q = (\xi, \eta)$ и Γ е затворена C^2 крива в равнината. Малко по-точно, ъгълът под който се вижда дъгата $\widehat{P_1P_2} \subset \Gamma$ от точката Q е равен на $\sphericalangle P_1QP_2$, който описва лъчът $\overrightarrow{QP}$, когато P описва $\widehat{P_1P_2}$. Ще пренебрегнем въпроса за ориентацията на кривата и ще се съсредоточим върху определяне на стойността на $w_1(Q)$ с точност до знак. Очевидно възникват 3 случая на разположението на Q: 1) $Q \in G$, 2) $Q \in \Gamma$, 3) $Q \notin \overline{G}$. При $Q \in \Gamma$ интегралът $w_1(Q)$ е несобствен. Ето как изглеждат нещата геометрично (виж фиг. 2, 3, 4):



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Разбира се, $w_1(Q) = -2\pi$, $Q \in G$ ($\overrightarrow{QP}$ извършва една пълна обиколка около Q); $w_1(Q) = -\pi$, $Q \in \Gamma$ ($\overrightarrow{QP}$ описва изправен ъгъл); $w_1(Q) = 0$, $Q \notin \overline{G}$. Отбелязваме сега, че 2π е дължината на единичната окръжност в $\mathbb{R}^2$, на която съответства единичната сфера в $\mathbb{R}^3$ с лице 4π. Значи можем да очакваме, че $w_0(Q) = -4\pi$, $Q \in G$; $w_0(Q) =$

-2π, $Q \in \Gamma$; $w_0(Q) = 0$, $Q \notin \overline{G}$, $G \subset \mathbb{R}^3$. Пътят към изграждането на теорията на потенциала е трасиран. Строгите доказателства, особено на $w_0(Q) = -2\pi$, $Q \in \Gamma$, нито са прости, нито са банални при техническа реализация [8].

4. Гаус и диференциалната геометрия. С въвеждането на Гаусовата кривина K като произведение на главните кривини на една гладка C^3 повърхнина в $\mathbb{R}^3$ и със своите дълбоки изследвания в областта на повърхнините (публикувани през 1827 г.) Гаус безспорно постави основите на т.н. вътрешна геометрия на повърхнините и е предтеча на Римановата геометрия.

Ще спомена съвсем накратко с няколко думи за този принос. Ще си позволя да напомня на читателя добре известни факти от геометрията. И така, нека гладката повърхнина $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ е зададена с векторното уравнение $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v)$, $(u,v) \in G$. Тогава $d\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_u du + \overrightarrow{r}_v dv$. Първата основна (квадратична) форма I на Γ се дефинира по формулата $I = d\overrightarrow{r}^2 = (d\overrightarrow{r}, d\overrightarrow{r}) = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2$, $E = \overrightarrow{r}_u^2$, $F = (\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v)$, $G = \overrightarrow{r}_v^2$ и с нея се измерват дължините на дъгите (кривите) върху Γ с лицев елемент $ds^2 = I$, ъглите между дъгите, лицата и т.н. Нека $\overrightarrow{n}$ е единичната нормала към Γ с подходяща ориентация, т.е. $\overrightarrow{n} = \pm \dfrac{\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v}{|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|^2}$. Втората основна форма II върху Γ се дефинира така: $II = -(d\overrightarrow{r}, d\overrightarrow{n}) = L(u,v)du^2 + 2M(u,v)dudv + N(u,v)dv^2$. Пресмята се непосредствено, че Гаусовата кривина $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2}$. Очевидно е, че при това представяне K зависи както от коефициентите на I, така и от коефициентите на II. Толкова по-интересно и важно е да се знае, че съгласно знаменитата Theorema egregium (забележителна, превъзходна теорема) на Гаус кривината K на Γ в т. (u,v) може да се изрази само чрез коефициентите E, F, G на I и техните производни. Да разгледаме сега онези гладки трансформации на Γ, запазващи I. Тях ще наричаме изометрии. Разбира се една трансформация на Γ е изометрия точно когато при нея се запазват дължините на дъгите върху Γ. От тук следва и изключителното значение на Theorema egregium. Тя означава, че Гаусовата кривина на една повърхнина е инвариантна при изометрии (дори локални) и значи е обект на вътрешната геометрия на повърхнините, която по дефиниция изучава онези свойства на повърхнините, които зависят само от първата форма I.

Заслужава и да спомена за важната теорема на Гаус-Боне, която установява връзката между изометричния инвариант $\int_{V^2} K$ на двумерно гладко компактно многообразие V^2 и Ойлеровата характеристика χ на V^2, която е от топологичен характер. Гаус е бил близо до доказателството на горния резултат, Боне я доказва за специален клас повърхнини, а по-горе предлагаме модерната формулировка.

Поради ограничения обем на тази статия по-долу само ще рамкираме приносите на Гаус в 3 изключително важни области на математиката, а също така в астрономията, геодезията и магнетизма. Част от научното му творчество е публикувано приживе (около 150 работи), а за другите научаваме от неговите Събрани съчинения [1] в 12 тома, излезли между 1863 г. и 1933 г. В някои свои неотпечатани приживе работи (дневници, писма, бележки, съдържащи се в [1]) Гаус е предтеча на крупни открития в математиката, а в други той по същество е направил откритията или пък е бил съвсем близо до тях.

Ето и тези важни открития.

5. Гаус, елиптичните и модулярните функции, аналитичните функции и неевклидовата геометрия.

5.1. Разсъждавайки в комплексна област Гаус установява двойната периодичност на интеграла от дъгата на лемнискатата $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ през 1797 г. В дневника си през 1800 г. той отбелязва откриването на двойно периодичните функции с произволен успоредник на периодите, а не само квадрат. Гаус изпреварва развитието на математиката като получава основни факти за елиптичните и модулярните функции. Те остават непубликувани. В периода 1825-1829 г. Абел и Якоби независимо един от друг и независимо от Гаус създават теорията на елиптичните функции. Модулярните функции се изследват през втората половина на 19 в.

Не мога да не се спра на една Гаусова миниатюра от 1791 г., непосредствено свързана с елиптичните функции и залегнала в учебниците по анализ. Разглеждаме числата $a > b > 0$ и образуваме две рекурентно дефинирани редици: $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = \sqrt{ab}$, $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \ldots$, $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Очевидно $a > a_1 > b_1 > b$, докато индуктивно имаме $a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$ и още $a > a_n > b_n > b$. Означаваме $\alpha = \lim a_n$, $\beta = \lim b_n$ и намераме, че $\alpha = \beta$. Числото α се нарича Гаусово средно на a и b и се бележи така: $\alpha = M(a,b)$. Това средно играе основна роля в Гаусовата теория на елиптичните функции. Например $G(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2M(a,b)}$ (формула на Гаус), $a > b > 0$, защото $G(a,b) = G(a_n,b_n), \forall n = 1,2,3,\ldots$. В по-нова терминология G се свежда към пълен елиптичен интеграл от I род.

5.2. В едно писмо до Бесел от 18.12.1811 г. Гаус описва доста подробно операцията интегриране на функция в комплексна област и стига до извода, че (поне понякога) интегралът от съответната функция не зависи от пътя, свързващ две фиксирани точки в равнината. В наши термини това е точно интегралната теорема на Коши. В същото писмо се среща и понятието за многозначна аналитична функция (от модерно гледище). Коши публикува своите първи изследвания в тази област през 1825 г. За да бъдем точни, ще споменем че нито при Гаус, нито в първите работи на Коши фигурират уравненията на Коши-Риман, които de facto дефинират аналитичната функция (значи отначало се интегрират непрекъснати функции). Има основания да считаме, че Гаус е разполагал с просто доказателство на интегралната теорема на Коши, базиращо се на 2-мерния вариант на формулата на Гаус-Остроградски (т.н. формула на Грийн или Гаус-Грийн).

5.3. Накратко за приноса на Гаус в изграждането на неевклидовата геометрия (сега известна като геометрия на Лобачевски-Бояй). По-точно става дума за построяването на такава геометрия в която V евклидов постулат: “През точка вън от дадена права минава точно една права успоредна на дадената” е заменен с отрицанието му. Има достатъчно основания да се счита, че около 1817 г. Гаус владее тази нова област на геометрията. Я. Бояй подготвя първа редакция на своя “Апендикс”, съдържащ основните му резултати по неевклидова геометрия през 1825 г., а около 1826–1828 г. до същите идеи като Бояй, но независимо от него достига Лобачевски. Гаус не публикува своите изследвания по неевклидова геометрия, докато Бояй отпечатва своя “Апендикс” през 1831 г., а Лобачевски публикува своите първи работи в същата област през 1829–1830 г. Гаус владее и основни формули от неевклидовата тригонометрия (синусова теорема и др.). Например ако α_i са ъглите на триъгълник в равнината (на Лобачевски), то $\dfrac{\sin\alpha_1}{\mathrm{sh}\alpha_1} = \dfrac{\sin\alpha_2}{\mathrm{sh}\ \alpha_2} = \dfrac{\sin\alpha_3}{\mathrm{sh}\ \alpha_3}$.

Що се отнася до астрономията и небесната механика ще кажа само, че Гаус разработва ефективен числен метод за изчисляване на елиптични орбити (главно на малки планети-астероиди) по няколко наблюдения през 1801 г. и въз основа на него Олберс преоткрива “загубения” астероид Церера на небесния свод на 31.XII.1801 г. През 1809 г. Гаус публикува своята забележителна книга “Teoria motus” в която са събрани интересни и важни методи за изчисляване на орбитите на небесните тела.

В областта на числения анализ Гаус развива метода на тригонометричното интерполиране, предлага Гаусовата квадратурна формула и т.н. С това приключва краткият обзор за математическото творчество на Гаус.

REFERENCES

[1] Carl Friedrich Gauss' Werke – I–XII, F. A. Perthes(Gotha), B. G. Teubner(Leipzig), J. Springer (Berlin), 1863–1933.

[2] Матеатическая энциклопедия. Советская энциклопедия, Москва, I–V, 1977–1985.

[3] Ф. Клайн. Развитието на математиката през 19 век, София, Наука и изкуство, 1973.

[4] Дж. Дънингтън. Карл Фридрих Гаус – титан на науката. София, Наука и изкуство, 1983.

[5] Т. Генчев. Карл Фридрих Гаус. София, Народна просвета, 1966.

[6] Н. Обрешков. Теория на числата. София, Наука и изкуство, 1962.

[7] К. Чандрасекхаран. Введение в аналитическую теорию чисел. Москва, Мир, 1974.

[8] Т. Генчев. Частни диференциални уравнения. София, Наука и изкуство, 1988.

Институт по математика и информатика
Българска Академия на Науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: popivano@math.bas.bg

230th ANNIVERSARY OF THE GREAT GERMAN MATHEMATICIAN C. F. GAUSS (1777-1855)

P. Popivanov

230th Anniversary of C. F. Gauss takes place in April 2007. He was one of the greatest mathematicians of all times with enormous impact in development of Mathematics in 19th and 20th centuries. This paper aims at presenting Gauss with some of his biggest achievements, often on the level of impressive miniatures. It tells about some of his insights that go ahead of his contemporaries by decades, and generally seeks pointing at the evolutionary path in Mathematics. I have consciously rejected biographic or belletristic way of presenting Gauss. I hope that carefully extracted pieces of his grand scientific legacy will help the readers to do the corresponding conclusion on their own.