МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2007
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2007
Proceedings of the Thirty Sixth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
St. Konstantin & Elena resort, Varna, April 2–6, 2007

ИНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИКА И МУЗИКА

Емил С. Келеведжиев, Зорница С. Дженкова

Предложен е учебен материал за средното училище, чрез който се свърват елементи от точните науки информатика и математика с музиката. Показано е построяването на питагоровата и съвременната музикални гами. Дадени са сведения за поява на характеристики, свързани с числата на Фибоначи и със Златното сечение в музикални произведения, и е направен кратък увод в алгоритмичната музика и в езика за програмиране Vmm. Подходът може да се използва в извънкласната работа, а също и при бъдещо подобряване на задължителната учебна програма.

1 Увод. Осъвременяването на средното образование изисква по-цялостно използване на междупредметни връзки даже и между твърде отдалечени на пръв поглед по учебното си съдържание области като математика и информатика от една страна, и музика, от друга. В настоящето изложение не разглеждаме използването на компютрите като средство за възпроизвеждане или за композиране на музика чрез използване на специализиран софтуер, нито използването на софтуер за обучение по музика, а ще насочим вниманието към някои алгоритмични и програмистки подходи, чрез които можем да доближим към музиката тези ученици, които имат повишен интерес към математиката и програмирането, както и обратното – да спечелим нови привърженици на информатиката измежду учениците (и учителите), които се увличат в музикалното изкуство.

Афинитетът на математиците към музиката е известен отдавна [3]. Различни изследвания показват, че децата, които свирят на пиано, проявяват и засилени логически способности, сходни с тези, които имат децата, отличаващи се с успешно решаване на сложни математически задачи. В такъв смисъл уместно е да се търси връзка между точните науки и музиката, която обичайно се разглежда само в емоционално-творчески аспект.

2. Питагорова школа. В антична Гърция математиката и музиката са били подчертано свързани. Музиката е била разглеждана като математическа дисциплина, изучаваща числови пропорции. В учебната програма на Питагоровата школа, музиката заема място в т. нар. квадриум (второто по-висше ниво на обучение – след тривиума) и е равнопоставена с аритметиката, геометрията и астрономията [2, 5]. Музиката тогава е била наука за звука и хармонията, и в този аспект, отделно са стояли всички творчески проблеми на създаването и изпълнението на музикални произведения.

Основни за Питагоровата музикална школа са понятията консонанс (съзвучие) и дисонанс (неблагозвучие, дисхармония). Отдавна е било забелязано, че два музикални тона не винаги се възприемат приятно (в консонанс) при едновременното им възпроизвеждане. В антична Гърция е било установено, че когато звучи даден основен музикален тон, други тонове, които се възприемат съзвучно с него, имат честоти, целочислено кратни на основната. Разбира се, тогава не са имали уреди за измерване на честотата на звука и затова този факт е бил открит с използване на обтегнати струни, чието звучене има честота, обратно пропорционална на дължината им.

Когато основният тон е с честота, например 220 Hz, тоновете с честота 440 Hz, 660 Hz, 880 Hz, и т. н. са съзвучни с основния. Нещо повече – точният физически анализ на звука показва, че заедно с основния тон винаги звучат и тонове с честоти, кратни на основния, макар и с по-малка сила. Ако вибрира струна, чиято дължина определя честота на звучене от 220 Hz, тогава струната генерира също и звуци с честоти 440 Hz, 660 Hz, 880 Hz, и т. н. Слушателят възприема основния тон, а интензивностите на кратните тонове (наричани обертонове) определят тембъра на инструмента – ето защо цигулката и тромпетът не звучат еднакво, даже ако свирят една и съща нота.

Най-важното отношение на честоти е $1 : 2$, което се нарича октава в съвременната (Западна) система за музикална нотация. Две различни ноти, намиращи се в това отношение, обикновено се разглеждат като една и съща (и са наречени с едно и също име). Например, химнът "Върви народе, възродени" започва с интервал октава (фиг. 1):

Фиг. 1. Началото на химна "Върви народе, възродени"

Други отношения на честоти формират "квинта" $(2 : 3)$, "кварта" $(3 : 4)$, "голяма терца" $(4 : 5)$ и "малка терца" $(5 : 6)$. Отношението между квинтата и квартата, $(2/3)/(3/4) = 8/9$, се нарича "цял тон". При струнните инструменти, тези отношения могат да се ползват директно за настройка – скъсяването на една струна до $2/3$ от първоначалната ѝ дължина ще предизвика звучене различно от предишното на музикален интервал от една квинта, а скъсяването до $8/9$ от първоначалната дължина ще даде звучене, по-високо с един музикален тон. Да отбележим, че питагоровите отношения се изразяват като дроби от вида $x/(x + 1)$, $x = 1, 2, 3, \ldots$.

Тези чисти хармонични отношения, използвани по времето на Питагор, са се оказали в известна степен неподходящи при развитието на музиката през Средните векове. Напрупването на няколко чисти отношения предизвиква дисонанс. Обяснението за това следва от *взаимната несъизмеримост* на дробите, изразяващи терците, квинтите и октавите. Например, октавата $(1 : 2)$ не може да се получи с последователно прилагане на подразделяне чрез интервали от вида $(8 : 9)$, т. е. чрез цели тонове. Ако основната честота е f, не е възможно използвайки цели тонове да получим честоти $2f$, $3f$ и т. н. Може само да получим *почти* удвояване на честотата, прилагайки 6 пъти отношението за цял тон:

$$\left(\frac{9}{8}\right)^6 \approx 2.0273.$$

3. Математическа основа на съвременната музикалната скала. За да се преодолеят недостатъците на питагоровата музикална скала, са били предлагани няколко решения, но днес е приета утвърдената от Йохан Себастиян Бах 12-степенна "равномерно-темперирана" скала. Нейната основна идея е октавата да бъде разделена на 12 части (наречени полутонове) и така да се апроксимират питагоровите интервали. Първо се дефинира понятието полутон като $1 : \sqrt[12]{2}$. Тогава питагоровият тон $9/8 = 1.125$ се апроксимира с $\left(\sqrt[12]{2}\right)^2 \approx 1.1225$ и така в новата скала бива заменен с т. нар. темпериран тон. Аналогично, питагоровата квинта $3/2 = 1.5$ се заменя с темперирана квинта, получена от 7 полутона $\left(\sqrt[12]{2}\right)^7 \approx 1.498307$.

Счита се, че хората с добър музикален слух предпочитат чистите питагорови интервали, но темперираните интервали са необходими при съвременната музика. Музикантите днес се примиряват с малките отклонения от питагоровия музикален строй, за да използват темперираната скала, едно от основните предимства на която е възможността за транспониране на мелодията, т.е. представянето ѝ в друга тоналност с повишаване или понижаване на честотата на началния тон.

Всички интервали в двете скали са показани в следната таблица:

Название	Стойност в 12-степенната скала	Съответен питагоров интервал
Унисон	1	1
Малка секунда	$\sqrt[12]{2^1} \approx 1.059463$	$16/15 = 1.066667$
Голяма секунда	$\sqrt[12]{2^2} \approx 1.122462$	$9/8 = 1.125000$
Малка терца	$\sqrt[12]{2^3} \approx 1.189207$	$6/5 = 1.200000$
Голяма терца	$\sqrt[12]{2^4} \approx 1.259921$	$5/4 = 1.250000$
Кварта	$\sqrt[12]{2^5} \approx 1.334840$	$4/3 = 1.333333$
Малка квинта	$\sqrt[12]{2^6} \approx 1.414214$	$7/5 = 1.400000$
Чиста квинта	$\sqrt[12]{2^7} \approx 1.498307$	$3/2 = 1.500000$
Малка секста	$\sqrt[12]{2^8} \approx 1.587401$	$8/5 = 1.600000$
Голяма секста	$\sqrt[12]{2^9} \approx 1.681793$	$5/3 = 1.666667$
Малка септима	$\sqrt[12]{2^{10}} \approx 1.781797$	$16/9 = 1.777778$
Голяма септима	$\sqrt[12]{2^{11}} \approx 1.887749$	$15/8 = 1.875000$
Октава	$\sqrt[12]{2^{11}} = 2.0$	$2/1 = 2.0$

Честотите на нотите от първата основна октава се получават като за стандарт се приема честотата на *Ла* (A) да е равна на 440 Hz. Тогава останалите ноти се получават с последователно умножение или деление с $\sqrt[12]{2} \approx 1.059463$. В таблицата за сравнение са дадени и съответните честоти от питагоровата скала:

Название		Честота (Hz) 12-степенна скала	Съответно питагорово отношение	Честота (Hz) питагорова скала	Разлика (Hz)
до	C	261.6258	1/1	264.0000	−2.3742
	$C\#$ или Db	277.1828	16/15	281.6000	−4.4172
ре	D	293.6650	9/8	297.0000	−3.3350
	$D\#$ или Eb	311.1271	6/5	316.8000	−5.6729
ми	E	329.6277	5/4	330.0000	−0.3723
фа	F	349.2284	4/3	352.0000	−2.7716
	$F\#$ или Gb	369.9945	45/32	371.2500	−1.2555
сол	G	391.9955	3/2	396.0000	−4.0045
	$G\#$ или Ab	415.3047	8/5	422.4000	−7.0953
ла	A	440.0000	5/3	440.0000	0.0000
	$A\#$ или Bb	466.1637	16/9	469.3333	−3.1696
си	B	493.8832	15/8	495.0000	−1.1168
до$_2$	C_2	523.2510	2/1	528.0000	−4.7490

Интересна задача е намирането на други равномерно темперирани скала, с които по-добре да се апроксимират питагоровите интервали. Построени са скали с 24, 48 и 53 полутона [6].

Фиг. 2. Хроматическа гама

Възходящо или низходящо мелодическо движение на полутонове в границите на една октава се нарича хроматическа гама (фиг. 2). В рамките на една октава съществуват $\binom{7}{2} = 21$ начина за разполагане на два полутона. В практиката се изполва подреждането

тон–тон–полутон–тон–тон–тон–полутон,

което определя "мажорна" гама (дадена в предната таблица) и

тон-полутон-тон-тон-полутон-тон-тон

за "минорна" гама. Например гамата до-минор се състои от нотите:

до, ре, ми-бемол, фа, сол, ла-бемол, си-бемол, до.

Когато пренасяме дадена мелодия на различни разстояние в пределите на октавата, но със запазване на интервалите, може да получим още 11 гами, в имената на които на първо място стои първата нота на гамата, а на второ думата “мажор” или “минор”. Например, ако пренесем гамата до-мажор с един тон нагоре ще получим гамата ре-мажор (в скоби са означени разстоянията между съседните ноти):

ре(тон)-ми(тон)-фа диез(тон)-сол(полутон)-ла(тон)-си(тон)-до диез(полутон)-ре.

Създаването на логаритмически равномерна дванадесетстепенна музикална скала е преминало през дългото развитие на математиката и музиката. Около 1700-та година немският учен и музикант Андреас Векмайстер предложил описаната тук скала и изработил пиано, настроено в съотвествие с нея. Не всички музиканти приели скалата на Вейкмайстер. Например, известния френски философ и музикант Дидро бил нейн противник – той смятал, че скала без чисти интервали не може да лежи в основата на музиката. Но великият немски композитор Йохан Себастиан Бах доказал жизнеспособността на новата система като съчинил два тома музикални произведения под общото название “Добре темперирано пиано”. Всеки от томовете съдържал по 24 пиеси (прелюдии и фуги) – по една за всяка от 12-те мажорни и 12-те минорни тоналности. С творчеството на Бах започва нова епоха в развитието на музиката – всички следващи композитори създавали музика с тази система.

4. Числата на Фибоначи и Златното сечение в музикалните композиции. Безкрайната редица от цели числа, в която първите два члена са равни на 1, а всеки следващ е равен на сумата на двата предишни, се нарича редица на числата на Фибоначи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... Нека общият член на тази редица означим с a_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, тогава редицата от отношенията a_i/a_{i+1} е сходяща и нейната граница е равна на ирационалното число 0.61803398..., известно с името “Златно сечение”.

Златното сечение се появява най-често в геометрични конструкции, например то е равно на отношението на двете части, на които разделяме осечка, когато отношението на цялата отсечка към по-голямата част е равна на отношението на по-голямата част към по-малката. Известно е, че същото отношение се среща в живата природа и в много произведения на изобразителното изкуство и архитектурата. Оказва се, че числата на Фибоначи, а също и Златното сечение могат да бъдат открити и в музикални произведения.

Според [9], пиесата на Бела Барток “Музика за струнни, ударни и челеста” е изградена върху тактови пропорции чрез числата на Фибоначи и кулминацията е между 55-ти и 89-ти такт. В [8] е даден пример с хор от месата на Хендел “Алилуя”, състоящ се от 94 такта, където кулминацията (соло тромпет “Кралят на кралете”) е разположен в тактове 57-58 (след 8/13 от цялата пиеса). Освен това, съществува подобна структура във всяко една от така образуваните две части на пиесата: след 8/13 от началото на първата част, т. е. в такт 34 се намира друга кулминационна област; след 8/13 от началото на втората част, т. е. в такт 79 още една кулминационна област се появява с изпълнение на соло тромпет. В почти всички сонати за пиано на Моцарт [7], отношението между броя на тактовете в началната част (експозиция), втората основна част (разработка) и третата част (реприза) следва Златното сечение.

5. Алгоритмична музика. Интересно е разглеждането на конструкции, чрез които музиката е композирана в резултат на прилагане на алгоритъм. Като пример с изпозване на целочислена функция да вземем функцията $\tau(n)$, която дава броя на всички положителни делители на n. Например, $\tau(20) = 6$, тъй като числото 20 има делители 1, 2, 4, 5, 10 и 20. Първите 30 стойности на функцията τ са: $1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 6, 2, 4, 4, 5, 2, 6, 2, 6, 4, 4, 2, 8, 3, 4, 4, 6, 2, 8$.

Представена е кратка музикална пиеса [4], чиито тонове се определят от стойностите $\tau(n)$ при $n = 1, 2, \ldots, 720$. Тези стойности са в интервала от 1 до 30. Равните последователни ноти се свързват с легато. Правилото за определяне на тоновете е дадено в следната таблица, където числото k показва номера на октавата $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$:

$\tau(n)$	$1+6k$	$2+6k$	$3+6k$	$4+6k$	$5+6k$	$6+6k$
Височина на тон	C_k	D_k	E_k	$F_k^{\#}$	$G_k^{\#}$	$A_k^{\#}$

Пример с използване на рекурсия се получава със следната редица от низове, наречена "златна верижка": Нека s_0 ='0', s_1 ='1' и за $n = 2, 3, 4, \ldots,$ низът s_n се образува от слепването на s_{n-1} и s_{n-2}: 0, 1, 10, 101, 10110, 10110101, 1011010110110, и т. н. Мелодията се получава чрез съпоставяне на ноти по подходящ начин, описан в [4]. Описани са други интересни примери с прилагане на комбинаторни конструкции, пресмятане на математически константи и пр.

6. Програмиране на музика. Съществуват голям брой средства за програмиране на музика [10]. Една част от тях представляват специализирани библиотеки или среди към широко разпространените езици. Други са специално създадени за целта. Ще представим един такъв език, близък по синтаксис с езика C и наречен Vmm (Virtual MIDI Machine) [11], които е свободно достъпен за изтегляне от цитирания сайт и е лесно усвоим за по-напредналите ученици, изучаващи програмиране. Основната цел на езика и на средата за работа с него е да предостави средства за програмиране на алгоритми, с които да се управлява стандарния MIDI (Musical Instruments Digital Interface) хардуер или софтуер на компютъра.

Езикът Vmm е опростен в сравнение с повечето езици за общо предназначение. Той предлага само един тип променливи – числови, в които могат да се съхраняват както цели, така и дробни числа. На разположение на програмиста са масиви и функции, при което променливите могат да са локални и глобални. Функциите могат да се използват рекурсивно. Присъстват познатите от езика C аритметични и логически оператори, а от управляващите конструкции са застъпени `if`, `loop` и `while`.

Основното средство с което се управлява MIDI интерфейсът са функциите `NoteOn()` и `NoteOff()`, за чието използване трябва да се включи библиотеката `stdMidi.vmm`. Ще посочим как изглежда описанието на първата от тези функции:

```
NoteOn(<Channel>,<Pitch>,<Velocity>);,
```

където Channel задава номер на канала за MIDI интерфейса, който от своя страна определя тембъра на звучене, което дава възможност за възпроизвеждане на звученето на различни музикални инструменти. Например, номер 1 съответства на традиционното пиано, 25 – на акустична китара, 74 – на флейта и т.н., съгласно стандарта "General MIDI" и тези номера могат да бъдат свързвани с различни музикални инструменти при различните реализации;

Pitch задава височината на музикалния тон, съгласно следната формула:

$$69 + 12\log_2\left(\frac{f}{440}\right)$$

където f е честотата в Hz. Така на тоновете и полутоновете от основната октава съответстват стойности от 60 до 71, последователно за нотите: C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, A# и B.

Velocity определя "силата" или "напрегнатостта" на звучене, което може да бъде задавано различно при различните избори на Channel. Използваната средна стойност е 127.

Следният програмен фрагмент предизвиква звучене на тона C от основната октава в продължение на 2 секунди:

```
NoteOn(1,60,127);
sleep(2500);
NoteOff(1,60);
```

Цялостна програма на Vmm, която възпроизвежда началото на "Върви народе, възроден", чийто нотен запис е даден на Фиг. 1, е следната:

```
#include "stdmidi.vmm"
proc main()
{
  NoteOn(1,69,127); sleep(300); NoteOff(1,69);
  NoteOn(1,81,127); sleep(900); NoteOff(1,81);
  NoteOn(1,79,127); sleep(300); NoteOff(1,79);
  NoteOn(1,78,127); sleep(450); NoteOff(1,78);
  NoteOn(1,76,127); sleep(150); NoteOff(1,76);
  NoteOn(1,74,127); sleep(450); NoteOff(1,74);
  NoteOn(1,71,127); sleep(150); NoteOff(1,71);
  NoteOn(1,69,127); sleep(1200); NoteOff(1,69);
  NoteOn(1,74,127); sleep(600); NoteOff(1,74);
  sleep(300);
  NoteOn(1,69,127); sleep(300); NoteOff(1,69);
  NoteOn(1,76,127); sleep(900); NoteOff(1,76);
  NoteOn(1,76,127); sleep(300); NoteOff(1,76);
  NoteOn(1,74,127); sleep(450); NoteOff(1,74);
  NoteOn(1,74,127); sleep(150); NoteOff(1,74);
  NoteOn(1,76,127); sleep(450); NoteOff(1,76);
  NoteOn(1,76,127); sleep(150); NoteOff(1,76);
  NoteOn(1,78,127); sleep(1800); NoteOff(1,78);
}
```

Разбира се, от програмистка гледна точка много по-интересни са конструкциите, в които по същество присъстват управляващи оператори. Предлагаме пример, в който със средствата на Vmm е програмирана "случайна музика":

```
#include "stdmidi.vmm"
proc main()
{
 a; b;
 srand(GetSystemTime());
 while(1)
 {
  a = (rand()%20)+70;
  b = rand()%200;
  NoteOn(10,a,127); sleep(b); NoteOff(10,a);
 }
}
```

Много числови редици, които се генерират алгоритмично, са подходящи за композиране на музикални илюстрации. Следващата програма пресмята редицата на простите числа, започвайки от 10000 и поражда музикални тонове, получени от стойностите на числата, взети по модул 60. Възможно е прилагането на различни модификации, с които да направим по-привлекателна музиката на простите числа:

```
#include "stdmidi.vmm"
proc main()
{
 a; a=10000;
 i;b;
 while(1)
 {
   a=a+1;
   i=2;b=0;
   while(i<a)
   {
    if((a%i)==0) {b=1;}
    i++;
   }
   if(b==0)
   {
    NoteOn(1,30+(a%60),127);
    sleep(50);
    NoteOff(1,30+(a%60));
   }
 }
}
```

Рекурсията е едно от мощните стредства в програмирането и тя е много подходяща и при алгоритмично създадената музика. Предлагаме прост пример за рекурсивно генериране на числата на Фибоначи, където извикването на музикалните тонове става в самата рекурсивна функция:

```
#include "stdmidi.vmm"
proc fib(n)
 {
  v;
  if(n==0) {return (0);}
  if(n==1) {return (1);}
  if(n>1)
   { v=fib(n-1)+fib(n-2);
     NoteOn(1,v%127,127); sleep(10*(v%10)); NoteOff(1,v%127);
     return (v);
   }
 }
proc main()
{
 fib(100);
}
```

Средата за програмиране Vmm поддържа квазипаралелни процеси, което е естествено необходимо при музикалните изпълнения – едновременно звучене на няколко музикални инструмента. Така могат да бъдат възпроизвеждани различни видове акорди, с които да се демонстрира консонантно или дисонантно звучене. Чрез звукови и музикални илюстрации може лесно и разбираемо за учениците да се въведе общата идея за паралелните процеси в информатиката.

Стартирането на два или повече квазипаралелни процеса в езика Vmm се извършва като пред името на съответните функции написваме думата `thread`. Функциите, които искаме да се изпълняват едновременно могат да бъдат различни или да бъде една и съща функция, извикана с различни параметри. В примера е показано как може да се възпроизведе едновременно хроматичната гама и нейно отместване с една октава.

```
#include "stdmidi.vmm"
proc p(b)
{
 i;i=0;
 while(i<12)
 {
   NoteOn(1,b+i,127); sleep(1000); NoteOff(1,b+i);
   i++;
 }
}
proc main()
{
  thread p(60);
  thread p(72);
}
```

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Е. Шилов. Простая гамма. Устройство музикальной шкалы. Москва, ГИФМЛ, 1963.
[2] M. Beer. Mathematics and Music: Relating Science to Arts. *Mathematical Spectrum*, 2006 (to be appear).
[3] E. Bloch. Essays on the Philosophy of Music. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1985.
[4] D. Cummerow. The Sound of Mathematics. Accessed on 14 November 2006 in the Internet: `http://www.geocities.com/Vienna/9349/`
[5] T. H. Garland, C. V. Kahn. Math and Music: Harmonic Connections. Palo Alto, Dale Seymour Publications, 1995.
[6] J. Gathen, J. Gerhard. Modern Computer Algebra. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 2nd edition, 2003.
[7] M. May. Did Mozart use the golden section? *American Scientist* **84**, No 1 (1996), 118–119.
[8] J. A. Rothwell. The Phi Factor: Mathematical Proportions in Musical Forms. Kansas city, University of Missouri, 1977.
[9] D. Rusin. Mathematics and Music. Accessed on 13 November 2006 in the Internet: `http://www.math.niu.edu/~rusin/papers/uses-math/music/`
[10] Programming languages that are used for a musical purpose. Accessed on 18 January 2007 in the Internet: `http://www.nosuch.com/tjt/plum.html`
[11] Virtual Midi Machine. Accessed on 18 January 2007 in the Internet: `http://vmm.audionetwork.be/`

Емил Келеведжиев
Институт по математика и информатика
Българска Академия на Науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: keleved@math.bas.bg

Зорница Дженкова
ПМГ – гр. Габрово
e-mail: zornitsa.dzhenkova@gmail.com

INFORMATICS, MATHEMATICS AND MUSIC

Emil S. Kelevedjiev, Zornitsa S. Dzhenkova

Elements of secondary school course material are offered for unified teaching in some aspects in science (mathematics and computer science) and music. Examples of construction of Pythagorean and contemporary well-tempered musical scales are given. Statements are reported for presence of Fibonacci numbers and Golden mean relations in some music pieces. A short introduction in algorithmic music is outlined and the programming language Vmm (Virtual MIDI machine) is briefly presented. The approach could be served in extra-curriculum activities as well as a proposal for a future improvement in the compulsory curriculum.