МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2007
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2007
Proceedings of the Thirty Sixth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians
St. Konstantin & Elena resort, Varna, April 2–6, 2007

ПОМАГА ЛИ КОМПЮТЪРЪТ ПРИ ИЗУЧАВАНЕ НА ГРАФИКА НА КВАДРАТНА ФУНКЦИЯ И КВАДРАТНИ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА?

Цеца Ил. Байчева, Кинка Ив. Кирилова-Лупанова

Целта на настоящата разработка е да представи експеримент проведен с ученици от ПМГ "В. Друмев" – В. Търново. При изучаване на графика на квадратна функция, на квадратно уравнение и неравенство се използва компютър като помощно и нагледно средство за обучение на ученици. За да се провери до каква степен учителят е изпълнил целите и задачите си, обучението завършва с тест съставен от авторите и включен заедно с резултатите от него в разработката.

Какво ни предизвика да осъществим този експеримент?

1. Учебното съдържание по математика в VIII клас [1] налага изучаване на квадратно уравнение и квадратна функция, а в X [3] – графика на квадратна функция и след това решаване на квадратни неравенства. Болшинството ученици, след като срещнат отрицателна дискриминанта, автоматично и погрешно в повечето случаи заключават, че задачата няма решение. А всички ние знаем, че отрицателната дискриминанта показва:

— при квадратно уравнение, че няма реални корени, а не изобщо че няма корени;

— графиката на квадратната функция не пресича оста Ox;

— при квадратно неравенство в зависимост от коефициента пред втората степен решение може да е всяко x, а може и да няма решение.

2. Категорично сме убедени, че в обучението по математика в някои случаи учениците имат нужда от визуализация на различни математически факти и твърдения.

3. Онагледяването на графиките с компютър провокира интерес към изучаване на графичните възможности на езика $C++$, което ги мотивира в обучението по информатика в XI клас.

Проведохме експеримент с два десети класа, профил "математика и информатика", като на единия клас споменатият материал бе поднесен по традиционния начин – с "маркер и бяла дъска", а на другия – с една елементарна програма, реализирана на Borland C++ for DOS. Учениците от втория клас още в началото бяха поставени в изследователска среда – в компютърна зала, където на всеки ученик беше осигурен компютър. Програмата изисква от учениците единствено да въведат коефициентите a, b, c на квадратната функция $f(x) = ax^2+bx+c$, след което компютърът начертава графиката на функцията и когато уравнението $f(x) = 0$ има реални корени, те се изписват на екрана. Програмата е направена така, че с един цвят (червен) оцветява частта от оста Ox за тези x, за които графиката на $f(x)$ е над Ox, т.е. решенията на неравенството $f(x) > 0$, а с друг (син) цвят, където графиката е под оста Ox, т.е. решенията на неравенството $f(x) < 0$. С помощта на учителя чрез подходящи и умело зададени насочващи въпроси, всеки ученик трябваше да се опита сам да установи:

— как изглежда графиката на квадратната функция – на къде е "обърната", и зависи ли това от коефициента a? Има ли общи точки с оста Ox – каква е връзката с дискриминантата D?

— къде са реалните корени (пресечните точки на графиката с Ox) на квадратното уравнение $f(x) = 0$ и кога има такива?

— какво означават различните оцветявания на част от оста Ox?

— винаги ли се показва графиката на екрана? Кога не се показва? Как да се коригира програмата за да се вижда винаги графиката на екрана?

Последното пък доведе до усъвършенстване на програмата. Мащабирахме точките и функцията с цел начертаване в рамките на екрана.

След известен брой опити, всички ученици сами достигнаха до възможните случаи за вида на графиката на квадратна функция в зависимост от коефициента пред втората степен на x и от дискриминантата. Също така установиха къде се намират решенията на квадратните неравенства $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$. Накрая учителят обобщи резултатите и подчерта какво показва старшият коефициент – накъде е отворена графиката и какво дискриминантата – броя общи точки с оста Ox. След началните часове, проведени в компютърната зала обучението продължи без компютър. Учениците вече имаха изградени умения да чертаят графики на квадратни функции, да решават квадратни неравенства и можеха да прилагат знанията си и в по-сложни задачи, свързани с изучения материал. Резултатите от експеримента установихме с провеждане на един и същи тест с двете паралелки. Той се състои от двадесет въпроса с избираем отговор. Имаше четири възможни отговора, от които само един бе верен. Всеки въпрос се оценяваше с една точка. Оценката се получаваше по формулата: $O = 2 + \frac{K}{5}$, където O е окончателната оценка, а K – общият брой събрани точки. За теста бяха подбрани задачи, които да обхванат колкото се може по-голяма част от преподадения материал. Целта бе да установим до каква степен са усвоени следните знания и умения:

— какво представлява графиката на квадратна функция;

— определяне множеството от функционални стойности в зависимост от дефиниционното множество;

— намиране на най-голяма и най-малка стойност на квадратна функция в интервал;

— определяне на интервалите на растене и намаляване;

— определяне на върха на параболата и оста на симетрия;

— определяне на квадратна функция при зададени определени условия;

— решаване на квадратно неравенство;

— прилагане необходимите и достатъчни условия квадратно неравенство да бъде изпълнено за всяко x, или да няма решение;

— прилагане на необходимото и достатъчно условие квадратно уравнение да има или да няма няма реални корени и техния брой.

След провеждане на теста се получиха следните резултати:

	оценка	x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i(x_i - \overline{x})^2$
1	отличен	6	10	60	0.81	0.66	6.6
2	много добър	5	11	55	-0.19	0.04	0.44
3	добър	4	5	20	-1.19	1.42	7.1
	общо		26	135			14.14

в експерименталната паралелка. И

	оценка	x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i(x_i - \overline{x})^2$
1	отличен	6	4	24	1.42	2.02	8.08
2	много добър	5	12	60	0.42	0.18	2.16
3	добър	4	5	20	-0.58	0.34	1.7
4	среден	3	5	15	-1.58	2.50	12.5
	общо		26	119			24.44

в контролната. Средният успех в експерименталната паралелка е $\overline{x} = 5.19$; средноквадратичното (стандартно) отклонение $S = 0.76$; модата е 5; медианата $Me = 5.23$. Резултатите в другата паралелка са: $\overline{x} = 4.58$; $S = 0.99$; мода 5; медиана $Me = 4.75$. Получените резултати показват, че учениците, които са били обучавани с използване на компютър, са усвоили значително по-добре учебния материал. Средният им успех е с 0.61 по-висок, което ни дава основание да продължим експеримента. Използването на компютъра като помощно и нагледно средство в обучението по математика създава предпоставки за максимално осмислени знания по разглежданата тема.

Проведеният тест е следния:

1 задача. Графиката на функцията $y = -3,5x^2$ при $x \in [-3; 2]$ е:

а) права; б) отсечка; в) парабола; г) част от парабола.

2 задача. Дефиниционното множество на функцията $y = x^2$ е интервалът $[-1; 2]$. Множеството от функционалните ѝ стойности е:

а) $[1; 4]$; б) $[0; 4]$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $[0; \infty)$.

3 задача. Най- голямата и най- малката стойности на функцията $y = x^2 - 4x + 8$ в интервала $(1; 4]$ са:

а) $\max y = 10$, $\min y = 5$; б) $\max y = 8$, $\min y = 4$; в) $\max y = 6$, $\min y = 3$; г) друг отговор.

4 задача. Функцията $y = -x^2$ е намаляваща в интервала

а) $(-1; 1)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-\infty; 0)$; г) $(0; +\infty)$.

5 задача. Върхът V на параболата – графика на функцията $y = 3x^2 - 10x + 1$, е: а) $V\left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$; б) $V(5; 26)$; в) $V\left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{22}{3}\right)$; г) $V\left(\dfrac{5}{3}; -\dfrac{22}{3}\right)$.

6 задача. При коя стойност на m правата $x = 3$ е ос на симетрия на графиката на функцията $y = x^2 - 3mx + 1$?

а) -1; б) 1; в) -2; г) 2.

7 задача. Графиката на функцията $f(x) = -x^2 + bx + c$ минава през точката $A(-2; 0)$ и точката $B(0; 6)$. Най-голямата стойност на функцията е:

а) 6,25; б) 6; в) 5,75; г) 9.

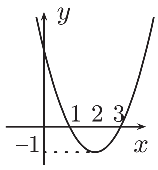
8 задача. Графиката на коя от посочените квадратни функции може да се получи от графиката на функцията $y = 4x^2 - 4x + 3$ чрез вертикално изместване "нагоре"?

а) $y = (2x-1)^2$; б) $y = 4(x-1)^2 - 4(x-1) + 3$; в) $4x(x-1) + 5$; г) $y = 2(4x^2 - 4x + 3)$.

9 задача. Функцията $f(x) = x^2 + bx + c$ е равна на нула при $x = 1$, намаляваща е в интервала $(-\infty; -1)$ и расте в интервала $(-1; \infty)$. Функцията е:

а) $f(x) = x^2 - 2x + 1$; б) $f(x) = x^2 + 2x - 3$; в) $f(x) = x^2 + 4x - 5$; г) $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

10 задача. Графиката на квадратната функция $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ е посочена на чертежа. Коефициентите удовлетворяват неравенствата:



а) $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$; б) $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$; в) $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$; г) друг отговор.

11 задача. Кои от точките са общи за графиките на функциите $y_1 = x^2 - 5x + 6$ и $y_2 = -x^2 + 5x - 6$?

а) $(2; 3)$ и $(3; 2)$; б) $(-2; 0)$ и $(-3; 0)$; в) $(2; 0)$ и $(3; 0)$; г) $(0; 2)$ и $(0; 3)$.

12 задача. Решенията на неравенството $x^2 + x - 2 < 0$ са:

а) $x \in (-1; 2)$; б) $x \in (-2; 1)$; в) няма решения; г) всяко x.

13 задача. Кое от неравенствата е вярно за всяко x?

а) $25x^2 + 10x + 1 > 0$; б) $2x - 3x^2 - 1 < 0$; в) $x^2 - x - 7 > 0$; г) $5x^2 - 4x + 3 < 0$.

14 задача. Кое от неравенствата няма решение?

а) $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$; б) $2x^2 + 5x - 3 < 0$; в) $-3x^2 + 2x - 5 > 0$; г) $-3x^2 + 2x - 5 < 0$.

15 задача. Стойностите на m, за които уравнението $2(m^2 - 1)x^2 + 4(m-1)x + 3 = 0$ няма реални корени, са:

а) $(-5; 1)$; б) $(-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$; в) $(-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$; г) $(-\infty; -5) \cup [1; +\infty)$.

16 задача. Числото 2 е решение на неравенството $f(x) = ax^2 - 3x - 2 > 0$. Кое от посочените твърдения е невярно?

а) Графиката на функцията $y = f(x)$ е парабола, отворена нагоре.

б) Уравнението $f(x) = 0$ винаги има два различни реални корена.

в) Решенията на неравенството $f(x) \leq 0$ са в краен затворен интервал.

г) Неравенството $f(x) > 0$ може да бъде изпълнено за $\forall\ x$.

17 задача. Кое от изброените твърдения е вярно за уравнението $x^2 + 15 = 10x$:

а) корените му са различни и са положителни; б) корените му са различни и са отрицателни; в) корените му са равни; г) няма реални корени.

18 задача. За кои стойности на параметъра k уравнението $(k+2)x^2 + (k-1)x + 1 = 0$ има два различни реални корена?

а) $(-\infty;-1)\cup(7;\infty)$; б) $(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(7;\infty)$; в) $(-\infty;-1]\cup[7;\infty)$; г) $(-1;7)$.

19 задача. Единият корен на уравнението $x^2 - mx - m - 1 = 0$ е отрицателен, а другият – положителен при:

а) $m \in [0;\infty)$; б) $m \in (-2;\infty)$; в) $m \in (-1;\infty)$; г) $m \in [-2;\infty)$.

20 задача. Неравенството $mx^2 + 2x - 3 < 0$ е изпълнено за всяко x при:

а) $m \in (-\infty;-3)$; б) $m \in_{-} \infty; 0)$; в) $m \in \left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$; г) $m \in \left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)$.

Програмата на C++, с помощта на която беше реализиран експериментът, може да бъде получена от авторите.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ст. Додунеков и др. Математика 8 клас. София, Регалия 6, 2005.

[2] Ст. Додунеков и др. Математика – профилирана подготовка 9 клас. София, Регалия 6, 2002.

[3] Ст. Додунеков и др. Математика – профилирана подготовка 10 клас. София, Регалия 6, 2002.

Цеца Илиева Байчева
ПМГ "В. Друмев"
ул. "В. Благоева" № 10
5000 Велико Търново
e-mail: zezab1@gmail.com

Кинка Иванова Кирилова-Лупанова
ПМГ "В. Друмев"
ул. "В. Благоева" № 10
5000 Велико Търново
e-mail: kkica@mail.ru

DOES COMPUTER HELP IN TEACHING QUADRATIC EQUATION, QUADRATIC INEQUALITY AND QUADRATIC FUNCTION GRAPHIC?

Tsetsa I. Bycheva, Kinka I. Kirilowa-Lupanowa

In this work we share our experience about an experiment held with students from the Mathematical School in the city of Veliko Tarnovo. The experiment included using a computer as a subsidiary and visual aid instrument for teaching students about quadratic equation, quadratic inequality and quadratic function graphic. To check the level to which the teacher has fulfilled the goals and tasks during the experiment a test has been held. It was composed by the authors and is included in this work as well as its results.