МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2007
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2007
Proceedings of the Thirty Sixth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
St. Konstantin & Elena resort, Varna, April 2–6, 2007

ВЪРХУ ДЕЙСТВИЕТО “ДОБАВЯНЕ” В ДЕЙНОСТТА “РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ”

Сава И. Гроздев, Тони К. Чехларова

Статията е посветена на действието “добавяне” като съставна част от процеса на решаване на определен вид задачи. В някои случаи е възможно добавянето да се автоматизира и да се превърне в операция. Последното е резултат на продължителна подготовка и решаване на подходящи задачи. Статията предлага една серия от такива задачи, която описва различни ситуации на добавяне и има за цел опознаване и усвояване на действието “добавяне”.

Решаването на задачи е дейност, която е свързана с реализацията на потребността от изучаване на математиката. Както отбелязва Леонтиев в [2], “основните “съставящи” на отделните човешки дейности са осъществяващите ги действия.” И по-нататък: “Действието е процес, който е подчинен на съзнателна цел.” В настоящата статия се интересуваме от решаването на конкретни класове задачи, при които съответната дейност включва определено действие. Става дума за действие, което ние наричаме “добавяне”. Пример на добавяне е т. нар. “допълнително построение”, което се използва в редица задачи по геометрия. Една не малка група ученици, предимно седмокласници и осмокласници, се сблъсква със задачи с допълнителни построения и липсата на подходяща подготовка в тази насока не дава възможност на тази група да се справя успешно с подобни задачи. Ще споменем досегашния формат на изпита след VII клас, в рамките на който традиционното условие във втората задача, изискващо допълнително построение, носеше на кандидатите за езикови и математически гимназии отрицателни емоции и разочарования.

Допълнителни са тези построения, за които в условията на задачите няма явни указания и за целесъобразността и необходимостта на които ученикът трябва да се досети. Оттук произтичат и трудностите за успешно решаване на подобни задачи. Добре известно е, че досещането не подлежи на моделиране, но известно е също, че то може да бъде тренирано, т.е. чрез целенасочена подготовка (разбира се, в продължение на години) да бъдат създадени условия за неговото проявление. Доста преди VII клас е възможно да се привлича вниманието на учениците върху това, че в някои по-прости случаи допълнителните построения са приложения на дефинициите на понятията, които се срещат в задачите. Например, ако в една задача става дума за разстояние от точка до права, като се използва дефиницията на това понятие, следва да се спусне перпендикуляр от точката към правата. В този случай действието “добавяне” (т.е. допълнителното построение) подлежи на автоматизация и превръщане в операция. Да уточним, че операцията е действие, което в резултат на многократно прилагане преминава в динамичен стереотип и се извършва механично. Оттук следва, че то е резултат на тренировка.

До операция е възможно да се стигне и в други случаи, които са малко по-сложни от посочените. Достатъчно е да споменем онези основни теореми, които изразяват характеристични признаци на дадени понятия и които могат да се използват вместо съответните дефиниции. Подобни теореми са еквивалентни със самите дефиниции и затова могат да заменят последните. Например, ако в условието на задачата става дума за допирателна към окръжност в точка A от окръжността, то подходящо допълнително построение (добавяне) е прекарване на радиуса до допирната точка, а понякога и на перпендикуляра към радиуса през A. По този начин се използва теоремата, която заменя дефиницията на допирателна: ако една права се допира до окръжност, то радиусът с край допирната точка е перпендикулярен на допирателната. За някои други примери ще стане дума по-нататък. При тях, както и в посочения пример, е ясно, че необходимо условие за наличие на операция е осъзнаване на съответната теорема. Едва след реализация на това условие се създават предпоставки за успешно трениране на произтичащото от теоремата действие, за да стане то автоматично.

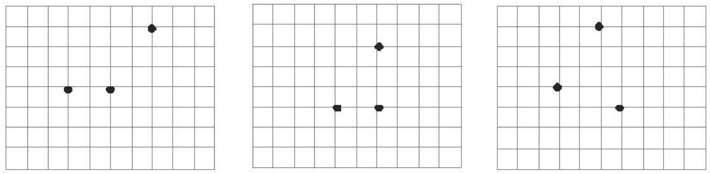
По-горе класифицирахме допълнителното построение като частен случай на добавянето. По-общо, в настоящата статия под "добавяне" разбираме действие от дейността "решаване на задача", което се изразява с допълване на даден обект с един или няколко елемента така, че новополученият обект да отговаря на определени условия. Както отбелязхаме, в някои случаи е възможно действието да се превърне в операция. Изрично ще отбележим, че действията, които реализират дадена дейност, се подбуждат от мотивите на дейността и са насочени към основната цел на дейността. Тази насоченост може да е директна или косвена. Например, в задачи 1 – 16 целта на добавянето е формулирана още в условието. Това в частност означава, че характеристиките на новополучения обект в резултат на добавянето са фиксирани в условието на задачата. В примерите след задача 16, както и в задача 17, целта е скрита и добавянето в тези случаи (в задача 17 то фактически е допълнително построение) подготвя решението по косвен начин. Сега характеристиките на новополучения обект не са известни предварително. Те се търсят така, че да благоприятстват успешното решаване на съответната задача.

Разбира се, дейността "решаване на задача" не е адитивен процес по отношение на добавянията. Това означава, че съставящите действия, реализирани чрез добавяне, са органически свързани с разглежданата дейност. Друг е въпросът, че в някои случаи добавянето е автоматизирано и се превръща от действие в операция. Но дори и в този случай действието, макар че има частна цел, се подчинява на мотива-цел на дейността.

По-долу предлагаме една серия от задачи, която има за цел да тренира действието "добавяне". В някои случаи е предложено и съответно онагледяване.

Задача 1. Добавете една точка към дадените три така, че четирите точки да са върхове на успоредник:

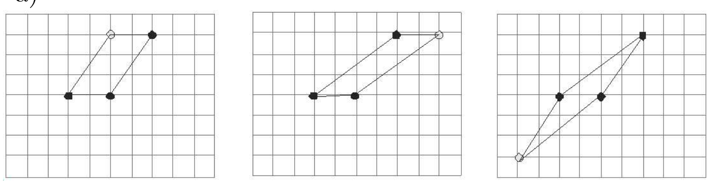
а) б) в)



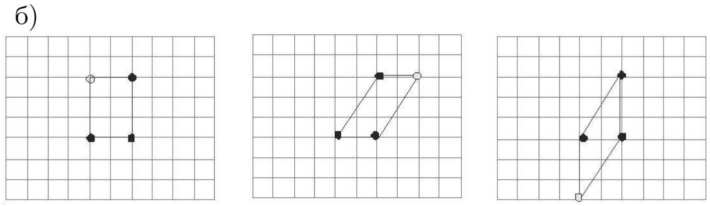
За успешното решаване на задачата е необходимо да се познават свойствата на успоредника: срещулежащите страни са успоредни и равни; диагоналите взаимно се разполовяват. Във всеки един от случаите има по три възможности.

Отговор:

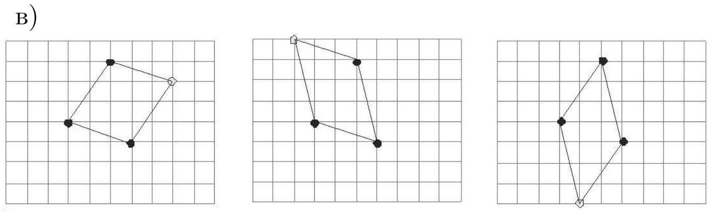
а)



б)

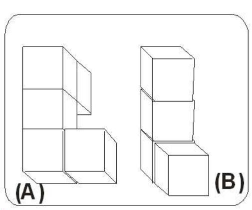


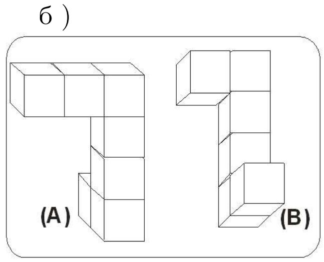
в)

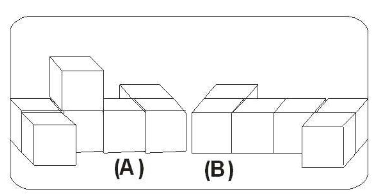


Задача 2. Добавете едно единично кубче в конструкция **(B)** така, че получената конструкция да е огледален образ на **(A)**:

а) б) в)



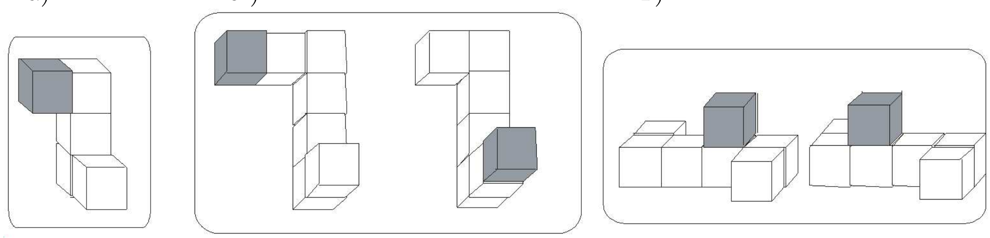




При двумерното изобразяване на решението сме оцветили добавеното единично кубче в различен цвят. Други възможности за онагледяване са посочване със стрелки, показване на движение чрез няколко стъпки, номериране на единичните кубчета и т.н.

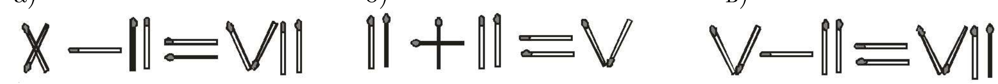
Отговор:

а) б) в)



Задача 3. Добавете една кибритена клечка така, че да се получи вярно числово равенство:

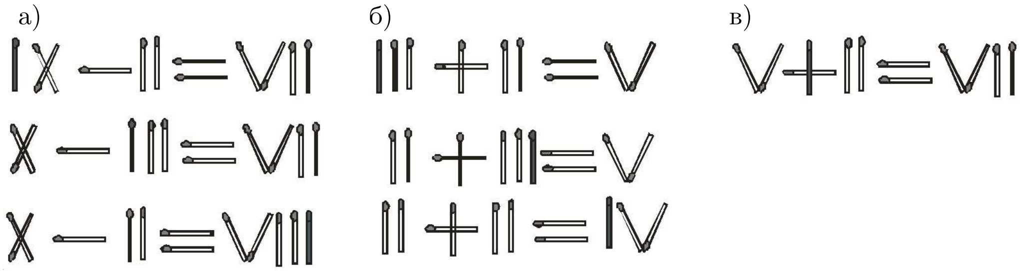
а) б) в)



В случая кибритената клечка е модел на римска цифра, на част от римска цифра, на знак “–” или на част от знаците “+” и “=”. При описание на отговора сме използвали промяна на цвета на добавената кибритена клечка. Друга възможност е използването на удебелена или пунктирана линия (вж. например [1]).

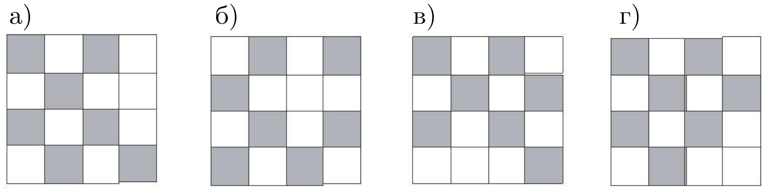
Отговор:

а) б) в)

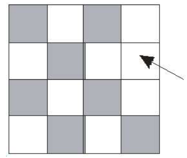


Задача 4. В квадратната мрежа добавете едно черно единично квадратче така, че да се получи шахматно оцветяване:

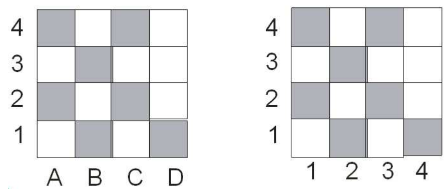
а) б) в) г)



Една възможност за онагледяване е да се посочи със стрелка мястото, което трябва да се допълни с черно единично квадратче:



Ако целта е свързана с декартовата координатна система, по-добре е да се въведе номериране – или по аналогия на шахматната дъска, или чрез наредена двойка числа.



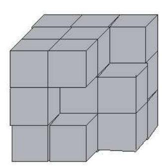
Отговор: а) D3 или (4; 3); б) C3 или (3; 3); в) B1 или (2; 1); г) D1 или (4; 1).

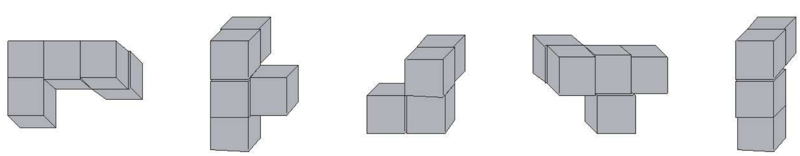
Задача 5. Добавете цифрата 5 така, че полученото петцифрено число да е възможно най-голямо:
а) 9348; б) 2671; в) 5238; г) 7846.

Отговор: а) 9**5**348; б) **5**2671; в) **5**5238 или 5**5**238; г) 78**5**46.

В разгледаните дотук задачи е известно какъв обект трябва да бъде добавен. В следващите примери обектът на добавяне трябва да се избере от дадено множество.

Задача 6. Към дадената конструкция да се добави една от конструкциите с номера от 1 до 5 така, че да се получи куб.





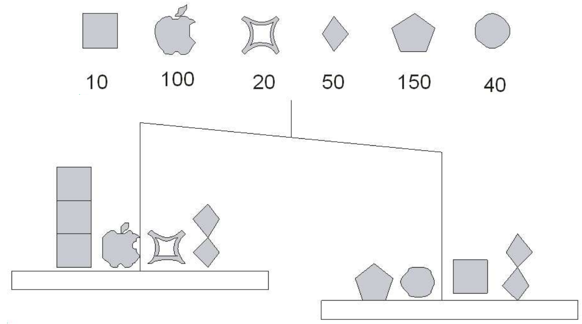
1 2 3 4 5

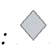
Отговор: 4.

Задача 7. Дадена е редицата 10, 15, 20, 25. Кое от числата 30, 0 или 5 не е възможно да се добави така, че новата редица да продължава да е аритметична прогресия?

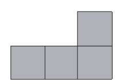
Отговор: 0.

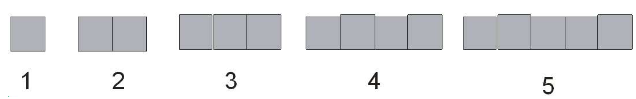
Задача 8. Коя от фигурите (показани с теглата си) трябва да се добави върху едно от блюдата на везната така, че тя да стане в равновесие?



Отговор: .

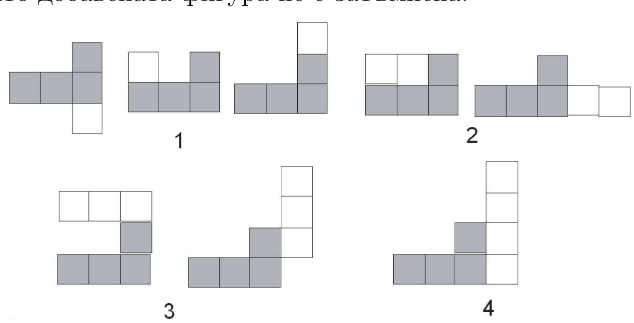
Задача 9. Към дадената фигура се добавя една от фигурите с номера от 1 до 5. С коя от тях не може да се получи фигура, която има ос на симетрия?





Отговор: 5.

За останалите фигури са показани възможностите за получаване на фигура с ос на симетрия, като добавената фигура не е затъмнена.



В следващата група задачи обектът, който трябва да се добави, не е известен предварително. Той трябва да се открие: в задача 10 – измежду цифрите, в задача 11 – измежду числата, в задача 12 – измежду символи.

Задача 10. Към множеството $\{4;\ 5;\ 9\}$ добавете една цифра така, че четирицифреното число, образувано с използване без повторение на елементите на новото множество, да се дели едновременно на 2 и на 5.

Отговор: 0.

Задача 11. Добавете едно число в числовата редица така, че да се получи аритметична прогресия: а) 5; 10; 20; б) 2; 4; 6; 8; 10.

В случая не е известно нито числото, нито мястото, на което трябва да се постави това число. За онагледяване на решението може да се използва друг цвят, друг шрифт, друг размер на записа, подчертаване на добавеното число или комбинация от няколко способа.

Отговор: а) 5; 10; **15**; 20; б) **0**; 2; 4; 6; 8; 10 или 2; 4; 6; 8; 10; **12**.

Задача 12. Добавете един символ в:
а) $\frac{\ }{4}$ така, че да се получи правилна обикновена дроб;

б) $\frac{\ }{18}$ така, че да се получи съкратима дроб, по-малка от 1;

в) $1514 = 1$ така, че да е вярно равенството;
г) $12 = 0{,}12$ така, че да е вярно равенството;
д) $5 < 56 < 6$ така, че да е вярно неравенството;
е) $22 = 4$ така, че да е вярно равенството;
ж) $42 = 2$ така, че да е вярно равенството.

Отговор: б) $\frac{\mathbf{2}}{18}$; $\frac{\mathbf{3}}{18}$; $\frac{\mathbf{4}}{18}$; $\frac{\mathbf{6}}{18}$; $\frac{\mathbf{8}}{18}$; $\frac{\mathbf{9}}{18}$; в) $15 - 14 = 1$; г) $12\boldsymbol{\%} = 0{,}12$;

д) $5 < 56 < 6\mathbf{0}$, ..., $5 < 56 < 6\mathbf{9}$; $5 < 5\mathbf{,}6 < 6$; е) $2 + 2 = 4$ или $2\ \mathbf{.}\ 2 = 4$;

ж) $4 - 2 = 2$ или $4\ \mathbf{:}\ 2 = 2$, или $42 = 42$.

В следващата задача се изисква добавяне на два обекта.

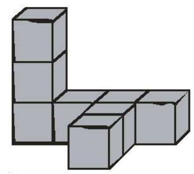
Задача 13. Добавете две числа на подходящо място в дадената числова редица така, че да се получи аритметична прогресия: а) 2; 8; 10; б) 2; 6; 10; 12; в) 2; 6; 10.

Отговор: а) 2; **4**; **6**; 8; 10; б) 2; **4**; 6; **8**; 10; 12;

в) 2; **4**; 6; **8**; 10; или – **6**; – **2**; 2; 6; 10 или 2; 6; 10; **14; 18** или – **2**; 2; 6; 10; **14**.

Добавяните обекти може да са повече от два, а може броят им да не е известен предварително.

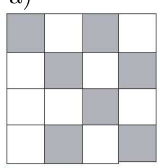
Задача 14. Какъв е минималният брой единични кубчета, които трябва да се добавят в конструкцията, за да се получи: а) правоъгълен паралелепипед; б) куб?



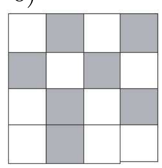
Отговор: а) 28; б) 56.

Задача 15. Възможно ли е да се получи шахматно оцветяване с добавяне на едно черно единично квадратче в мрежата:

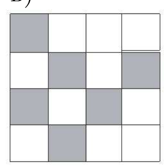
а)



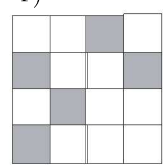
б)



в)



г)



Отговор: а) да; б) не; в) не; г) не.

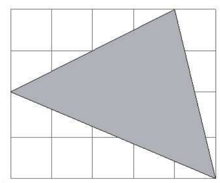
За решаване на в) и г) може да се използва броят на черните (белите) единични квадратчета. За в) те са 6 и след добавяне на още едно стават 7. Следователно не може да се получи шахматно оцветяване.

Задачите за допълване на текст са всъщност задачи за добавяне. Ето един пример:

Задача 16. Добавете подходяща дума на посоченото място така, че да се получи вярно твърдение:
а) Квадратът е .... с прав ъгъл.
б) Квадратът е .... с равни съседни страни.

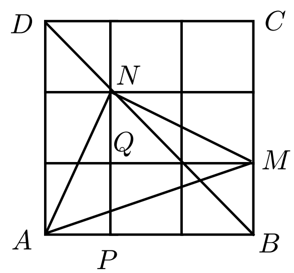
Отговор: а) ромб; б) правоъгълник.

При изчисляване на сумата $9 + 98 + 997 + 9996 + \cdots + 9999999990$ е удобно да се използва, че събираемите са близки съответно до 10; 100; 1000 и т.н. Затова добавянето последователно на числата 1; 2; 3; …; 9; 10 улеснява пресмятанията. В сумата $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\frac{1}{1024}+\frac{1}{2048}$ всяко събираемо след първото е два пъти по-малко от предходното. Следователно, ако към сумата се добави последното събираемо и събирането започне отдясно наляво, пресмятането се опростява. Така за учениците, които не познават формулата за намиране на сумата на първите n члена на геометрична прогресия, рационалното решение на посочения пример е свързано с добавяне на обикновената дроб $\frac{1}{2048}$. Да отбележим, че в тези случаи след добавяне е необходимо да се извърши и съответно отстраняване. За да се намери лицето на затъмнения триъгълник по-долу, е удобно триъгълникът да се допълни до правоъгълник чрез добавяне на три правоъгълни триъгълника.



Тази идея се използва в следващата задача. По същество добавянето в нея е допълнително построение.

Задача 17. Даден е квадрат $ABCD$ и точки M и N съответно върху страната BC и диагонала BD така, че $BM = \frac{1}{3}BC$ и $BN = \frac{2}{3}BD$. Да се намери мярката на $\sphericalangle AMN$.



Решение: Да разделим квадрата $ABCD$ на единични квадратчета. Нека P е десният долен връх на най-лявото долно единично квадратче, а Q е левият долен връх на средното единично квадратче (вж. чертежа). Тогава $\Delta APN \cong NQM$ (правоъгълни триъгълници със съответно равни катети) и следователно $AN = MN$. Освен това $\sphericalangle ANP = \sphericalangle QMN$и понеже $\sphericalangle QMN + \sphericalangle QNM = 90^\circ$, то $\sphericalangle ANP + \sphericalangle QNM = 90^0$, т.е. $\sphericalangle ANM = 90^\circ$. Следователно ΔAMN е правоъгълен и равнобедрен, откъдето заключаваме, че $\sphericalangle AMN = 45^\circ$.

Забележка. Общото между задача 17 и примера преди нея за намиране лицето на затъмнения триъгълник е използването на квадратна мрежа (решетка). Този специален вид допълнително построение е обект на друго изследване. Съществува и разлика: при задачата изходната фигура (квадратът) се разделя на квадратна мрежа, а в примера изходната фигура (триъгълникът) се допълва до правоъгълник с квадратна мрежа. Във втория случай използваното действие е известно още като "опаковане".

Представените задачи следва да се решават при усвояване на съответно знание. Те могат да служат за модели при съставяне по аналогия на задачи с друго учебно съдържание. Подходящи са да се използват като система от задачи, когато целта е свързана с действието „добавяне”. Да отбележим, че редица практическите задачи са свързани с получаване (реконструиране, декомпозиране, деформиране, промяна, преобразуване, трансформиране, коригиране и др.) на обект от друг обект или група обекти при определени условия. За целта следва да се направи избор на съответно действие или на последователност от действия с тези обекти. Добавянето не е единственото възможно действие. Възможно е също отстраняване на елемент от обект, преместване на елемент от едно място в даден обект на друго място, размяня на местата на два елемента в даден обект, замяна на елементи и др. Всички тези действия, които са различни от добавянето, са предмет на друго изследване.

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Гроздев, Т. Чехларова. Онагледяване в осем задачи. В: Математика, информатика и компютърни наукил Изд. “Слово”, Велико Търново, 2006, 260–267.
[2] А. Леонтьев. Деятельность. Сознание. Личность.
http://wwwpsy.msu.ru/science /public/leontiev/index.html

Сава Гроздев
Институт по математика и информатика
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: savagroz@math.bas.bg

Тони Чехларова
ПУ “Паисий Хилендарски”
4000 Пловдив
e-mail: tchehlarova@mail.bg

ON THE ACTION OF ADDITION IN THE ACTIVITY OF PROBLEM SOLVING

Sava I. Grozdev, Tony K. Chehlarova

The action of addition is considered in the paper as a consisting part of the process of problem solving for a definite type of mathematical problems. An automation of addition is possible in some cases which reduces it to an operation. The last is a result of lasting preparation and solving of suitable mathematical problems. The paper proposes a series of such problems which describes different situations of addition and aims at acquainting and learning of the action of addition.