МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2007
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2007
Proceedings of the Thirty Sixth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
St. Konstantin & Elena resort, Varna, April 2–6, 2007

# НЯКОИ ОСНОВНИ ДЕЙНОСТИ ПРИ ИЗСЛЕДВАНЕ И СЪСТАВЯНЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИ ЗАДАЧИ

**Милен Н. Найденов**

В тази работа са разгледани пет основни дейности, които са извършвани при изследване и съставяне на математическите задачи. Като приложение петте дейности са използвани да се намери каква връзка съществува между две задачи, които са били обект на изследване в два доклада на Тридесет и петата пролетна конференция на Съюза на математиците в България. В процеса на изследването от изходната задача са получени множество нови задачи.

Всички дейности по изследване и съставяне на математически задачи е невъзможно да бъдат изучени, а може би и открити. Някои от тях са били известни на човечеството от векове, а други вероятно все още не са изследвани. Тук ще бъдат разгледани следните основни дейности: Изследване за съдържателност, Обобщение, Мащабиране, Специализация, Обръщане.

Ще изясним накратко в какво се състои и какво обхваща всяка една от тях.

**Изследване на съдържателност.** Според [2] съдържателността е специфична смислова информация, която се съдържа в скрит вид в условието на задачата. При решаване на задачата тази информация се разкрива и с намирането на всеки нов начин тя се увеличава. Затова всяко изследване за съдържателност започва със събиране на различни начини за решаване на изследваната задача. Достигането на достоверната оценка на задачата е дълго и трудно [2]. По-бързо резултат може да се получи с т.н. експертен метод [4].

**Обобщение.** Най-често се осъществява чрез въвеждане на подходящо избран параметър, при чиято промяна се обхващат повече на брой случаи от тези, поставени в изследваната задача. Според [1], обобщение е преминаване от разглеждане на дадено множество от обекти към разглеждане на по-голямо множество, съдържащо даденото. Понякога за една задача има няколко възможности за обобщения, но съществува и такава възможност, която се набива в очи, такава, която се натрапва. Това означава, че за тази задача, съществува характерен признак, който определя параметър, чиято промяна води до обобщение. Някои от начините за решаване на задачата показват по естествен път какъв признак може и трябва да бъде параметризиран при съответното обобщение.

**Мащабиране.** На геометричен език това е подобно преобразуване. Стойностите на зададените величини се увеличават или намаляват пропорционално. В процеса на изследването мащабирането е преход от един частен случай към друг, т.е. от един конкретен обект към друг конкретен обект.

**Специализация.** Избира се важен частен случай от дадено множество. Изборът може да е произволен, но може да бъде подчинен на някои цели. Примерно, кратък отговор или очакван резултат в определени граници. Според [1], специализация е преход от разглеждането на дадено множество от обекти към разглеждане на по-малко множество, съдържащо се в даденото.

**Обръщане.** Това е когато от дадена задача се получава нова, като се сменят ролите на дадените и търсените величини. Тук трябва да се внимава особено много, защото обратните твърдения не винаги са верни и следователно не винаги възможни!

Нататък в нашето изложение с помощта на тези дейности, прилагани в различни ситуации, ще започнем изследването, като за нас начална задача ще бъде следната

**Задача 1** (вж [2]). През върха на равностранен триъгълник със страна, равна на единица, е прекарана права, която го дели на два триъгълника. Намерете радиусите на окръжностите, вписани във всеки от получените триъгълници, ако е известно, че единият от тези радиуси е два пъти по-голям от другия.

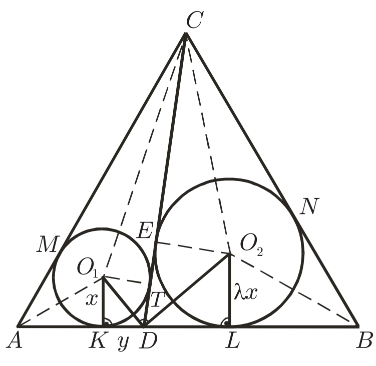
Тази задача я избрахме за начална, тъй като в [2] нейната съдържателност е оценена с 1,6094 НАТА, т.е. първата основна дейност вече е завършена и разполагаме с пет различни начина за нейното решаване.

Именно това дава вече друг поглед върху задачата, върху цялата нейна същност и вече знаем повече за цялата конструкция. Какво би станало, ако раздвижим секущата, така че единият радиус да е $\lambda$ ($\lambda > 1$) пъти по-голям от другия?

Очевидно по-обща е следната:

**Задача 2.** През върха на равностранен триъгълник със страна равна на единица, е прекарана права, която го дели на два триъгълника. Намерете радиусите на окръжностите, вписани във всеки от получените триъгълници, ако е известно, че единият от тези радиуси е $\lambda$ пъти по-голям от другия.

За целите на обобщението най-удобно се явява следното решение, което е първия начин от [2].




*Решение:* Нека $ABC$ е дадения равностранен триъгълник. Правата $CD$ го дели на два триъгълника. Нека окръжността $k_1(O_1, r_1)$ се допира до $AB$, $CD$ и $AC$ съответно в точките $K$, $T$ и $M$, а окръжността $k_2(O_2, r_2)$ се допира до $AB$, $BC$, $CD$ съответно в точките $L$, $N$, $E$. Означаваме $r_1 = O_1K = x$ и тогава по условие $r_2 = O_2L = \lambda x$.

$AO_1$ и $BO_2$ са ъглополовящи и изразяваме $AK = x.\operatorname{cotg} 30^\circ = x\sqrt{3}$ и $BL = \lambda x\sqrt{3}$. Тогава, $CM = 1 - AM = 1 - AK = 1 - x\sqrt{3}$. Отсечките $AM$ и $AK$ са равни като дължини на допирателни от една точка към една и съща окръжност. Използвайки неколкократно тази теорема, получаваме $CT = 1 - x\sqrt{3}$, $CE = 1 - \lambda x\sqrt{3}$.

Явно $TE = CT - CE = (\lambda - 1)\, x\sqrt{3}$. Ако означим $KD = DT = y$, тогава

$$DE = DT + TE = y + \lambda x\sqrt{3} - x\sqrt{3} = DL.$$

За основата $AB$ имаме:

$$AB = AK + KD + DL + LB = x\sqrt{3} + y + y + \lambda x\sqrt{3} - x\sqrt{3} + \lambda x\sqrt{3},$$

т.е.

$$2y + 2\lambda\sqrt{3} = 1 \rightarrow y + \lambda x\sqrt{3} = \frac{1}{2}.$$

Получихме едно уравнение за двете неизвестни $x$ и $y$. Второто уравнение може да получим от подобието на триъгълник $KDO_1$ и триъгълник $LDO_2$. От него следва, че

$$O_1K.O_2L = KD.DL \text{ т.е. } \lambda x^2 = y\left(y + \lambda x\sqrt{3} - x\sqrt{3}\right).$$

Достигнахме до следната система за $x$ и $y$:

$$\left|\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} - \lambda x\sqrt{3} \\[2ex] \lambda x^2 = y^2 + \lambda xy\sqrt{3} - xy\sqrt{3} \end{array}\right. ,$$

която след преработка води до квадратното уравнение $8\lambda x^2 - 2x\,(\lambda + 1)\sqrt{3} + 1 = 0$, с решения $x_{1,2} = \dfrac{(\lambda + 1)\sqrt{3} \pm \sqrt{3\lambda^2 - 2\lambda + 3}}{8\lambda}$. Като сравним $x$ с $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$, което е дължината на радиуса на вписаната в дадения триъгълник окръжност, отговорът на задачата е със знак минус пред корена! Вече се вижда, че изходната задача 1 е решена в общия случай и оттук при различни стойности на параметъра може да се получат безброй задачи, различаващи се от изходната само по стойностите на някои величини. В приложената таблица са посочени 83 такива задачи – варианти на изходната при различни стойности на $\lambda$. Резултатите са отразени в следната:

Таблица

| № | $\lambda$ | $r$ | № | $\lambda$ | $r$ | № | $\lambda$ | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 : 1 | $\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{11}}{16}$ | 7 | 8 : 1 | $\frac{9\sqrt{3}-\sqrt{179}}{64}$ | 13 | 3 : 2 | $\frac{\sqrt{3}}{12}$ |
| 2 | 3 : 1 | $\frac{\sqrt{3}}{12}\ 2-\sqrt{2}$ | 8 | 9 : 1 | $\frac{\sqrt{3}}{36}\ 5-\sqrt{19}$ | 14 | 5 : 2 | $\frac{7\sqrt{3}-\sqrt{67}}{40}$ |
| 3 | 4 : 1 | $\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{43}}{32}$ | 9 | 10 : 1 | $\frac{11\sqrt{3}-\sqrt{283}}{80}$ | 15 | 7 : 2 | $\frac{9\sqrt{3}-\sqrt{131}}{56}$ |
| 4 | 5 : 1 | $\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{17}}{20}$ | 10 | 11 : 1 | $\frac{6\sqrt{3}-\sqrt{86}}{44}$ | 16 | 9 : 2 | $\frac{\sqrt{3}}{72}\ 11-\sqrt{73}$ |
| 5 | 6 : 1 | $\frac{7\sqrt{3}-3\sqrt{11}}{48}$ | 11 | 12 : 1 | $\frac{\sqrt{3}}{96}\ 13-\sqrt{137}$ | 17 | 11 : 2 | $\frac{13\sqrt{3}-\sqrt{331}}{88}$ |
| 6 | 7 : 1 | $\frac{4\sqrt{3}-\sqrt{34}}{28}$ | 12 | 13 : 1 | $\frac{7\sqrt{3}-11}{52}$ | 18 | 13 : 2 | $\frac{15\sqrt{3}-\sqrt{467}}{104}$ |

Като разгледаме резултатите от обобщението виждаме, че при $\lambda = 3 : 2 r_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$ и $r_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$. Избираме това да бъде за нас важния частен случай, от който при мащабиране с коефициент 8 се получава $r_1 = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ и $r_2 = \sqrt{3}$, т.е. това са стойностите за $\mathrm{r}_1$ и $\mathrm{r}_2$ при задачата от [3]. Следователно, ако в условието на задача 1 е зададена дължина на страната 8 и отношение на радиусите 3 : 2, то отговорът за по-малкия от търсените радиуси е $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$. Нека сега да зададем дължините $r_1$ и $r_2$, т.е. да формулираме следната

**Задача 3.** През един от върховете на равностранен триъгълник е прекарана права, която го дели на два триъгълника. Ако дължините на радиусите на окръжностите, вписани във всеки от получените триъгълници, са $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}$, намерете страната на равностранния триъгълник.

За получаване на задача 3 осъществихме основната дейност обръщане, т.е. сменихме ролите на зададените и търсените величини! Обаче получихме некоректна задача! Нещо в условието недостига! Какво е то?

Липсващият елемент може да бъде линеен или ъглов. Ако зададем още и дължината на отсечката $O_1O_2 = 2\sqrt{\dfrac{7}{3}}$, то задачата вече е коректна. За нейното решаване са необходими само знания за правоъгълен триъгълник и в този смисъл тя е станала много лесна. Но има и други възможности. Една от тях е свързана с начина, по който е зададена дадената конструкция.

Очевидно такъв момент съществува винаги при геометрични задачи. В примерите по-горе конструкцията е равностранен триъгълник и той се определя директно чрез дължината на страната (1 или 8). Така задачата е определена с точност до еднаквост. Същата конструкция на равностранен триъгълник $ABC$ може да бъде зададена и така: дължините на допирателните $CM$, $CN$ и дължините на радиусите $r_1$ и $r_2$. Да разгледаме следната:

**Задача 4.** (вж [3]). Даден е триъгълник $ABC$. Точка $D \in AC$, така че вписаната в триъгълник $ABD$ окръжност $K_1$ има радиус $r_1 = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$, а вписаната в триъгълник $BCD$ окръжност $K_2$ има радиус $r_2 = \sqrt{3}$. Ако $M$ е допирната точка на $K_1$ с $AB$ и $BM = 6$ и $N$ е допирната точка на $K_2$ с $BC$ и $BN = 5$, да се намерят дължините на страните на триъгълник $ABC$ и на отсечката $BD$.

**Отговор:** $BD = 7$, $AB = BC = AC = 8$.

Проведените разсъждения показаха как от изходната задача 1 с помощта на изследването за съдържателност и на подходящо избрани: обобщение, специализация, мащабиране и обръщане получихме задача 4, което показва връзката между тези две задачи.

Направеното до тук предизвиква следните въпроси, чийто отговори са обект на бъдещи изследвания:

— Кое е най-краткото решение на новата задача?

— Каква е съдържателността на новата задача?

— Дали използваните основни дейности променят оценката за съдържателност на новополучените задачи?

Накрая ще завършим с въпрос: Различни ли са следните две задачи?

**Задача 5**. (вж [6]). През върха C на триъгълник $ABC$ е построена върхова секуща, която го разделя на два триъгълника. Дължините на радиусите на вписаните в тях окръжности са съответно $2\sqrt{3}$и $3\sqrt{3}$. Да се определи лицето на триъгълник $ABC$, ако дължините на допирателните от точка $C$ до допирните точка на тези окръжности със секущата са съответно 18 и 15.

**Отговор:** $S = 144\sqrt{3}$, $a = 24$.

**Задача 6**. Даден е триъгълник $ABC$. Точка $D \in AC$, така че вписаната в триъгълник $ABD$ окръжност $K_1$ има радиус $r_1 = 9\sqrt{3}$, а вписаната в триъгълник $BCD$ окръжност $K_2$ има радиус $r_2 = 10\sqrt{3}$. Ако $M$ е допирната точка на $K_1$ с $AB$ и $BM = 63$, а $N$ е допирната точка на $K_2$ с $BC$ и $BN = 60$, да се намерят дължината на отсечката $BD$ и дължините на страните на триъгълник $ABC$.

**Отговор:** BD = 78, AB = BC = AC = 90.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Д. Пойа. Математиката и правдоподобните разсъждения, том I: Индукция и аналогия в математиката. Народна просвета, София, 1970, 32–38.

[2] М. Н. Найденов. За съдържателността на математическите задачи. *Математика и математическо образование*, **35** (2006), 424–429.

[3] В. Милушев, Д. Френкев. Евристичен подход при решаване на геометрични задачи от определен вид. *Математика и математическо образование*, **35** (2006), 418–423.

[4] М. Н. Найденов. Измерване на информация при експертно оценяване на една задача по математика. Научни трудове на ВВМУ "Н. Й. Вапцаров", Варна, 2005, 73–75.

[5] М. Н. Найденов. Обобщение на една конкурсна задача, НС 2006 г. – ВВМУ 125 годишнина.

[6] Задача 3 от темата на конкурса за прием във ВВМУ на 4 юни 2006 г.



Милен Найденов Найденов
ул. "Сан Стефано" №2, Вх.Б
9000 гр. Варна


## SOME BASIC WORKS IN RESEARCH AND CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL PROBLEMS


**Milen N. Naydenov**



Five basic works accomplished during research and constructions of Mathematical Problems are described in this paper. These works have been used as application to find out the connection between two problems, described in two previous papers. During the research a great number of problems have been constructed from the initial problem.