МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2007
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2007
Proceedings of the Thirty Sixth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
St. Konstantin & Elena resort, Varna, April 2–6, 2007

КОМПЛЕКСЕН МОДЕЛ НА ПРОЦЕСА РЕШАВАНЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИ ЗАДАЧИ ОТ ОПРЕДЕЛЕН ВИД*

Димитър Г. Френкев, Васил Б. Милушев, Добринка В. Бойкина

В статията е изграден комплексен (идеален-материален) модел на процеса решаване на задачи от определена математическа област чрез елементи от същата или друга математическа област. Демонстрирана е неговата приложимост за съставяне на дидактически системи от задачи със сравнително голям формиращ потенциал в учебно-възпитателен и методически аспект.

Целта на настоящото изследване е да допринесе за усъвършенстване на моделите на дейността решаване на учебни задачи, които могат да се решават с помощта на елементи от теорията на различни области на училищната математика. За построяване по-нататък на изложението ще посочим накратко етапите на един, осъвременен от нас, вариант на тъй наречения "идеален модел" (вж [3]) на процеса на решаване на задачи:

$\mathbf{E_1}$: Разбиране и усвояване на условието на задачата, т.е. възприемане на дадената в задачата информация и нейната преработка: анализиране на текста на задачата, детайлизиране на даденото и търсеното в нея; построяване на спомагателни модели (схеми, таблици, скици, чертежи), чрез което се поставя акцент върху ключови взаимовръзки между обектите в задачата; усъвършенстване на спомагателните модели и установяване на нова, допълнителна информация за тях; опериране със спомагателните модели.

$\mathbf{E_2}$: Изграждане на идея и съставяне на план за решаване на задачата: оценяване и систематизиране на информацията, получена в етап E_1; актуализиране и реконструиране на миналия опит на решаващия задачата по посока на това дали тя е с позната или е с непозната структура (ако задачата е с позната структура – ориентиране към идея за решаване въз основа на конкретизиране на съответния известен метод за решаване; ако задачата е с непозната структура – използване на евристики /познати или нови, които целенасочено трябва да се овладеят/ за търсене и откриване на решение, използване на общологически методи, евентуално в съчетание с определени частни методи, за откриване на решение, търсене на други идеи за решаване чрез други евристики); обособяване на съвкупност от идеи за решаване, оценяване на всяка от тях и избиране на опорна идея; превъплъщаване (трансформиране) на опорната идея в план за решаване на задачата.

*Изследванията са направени с финансово съдействие на фонд "НИ" при ПУ. Договор 05-М-16

E_3: Реализиране на плана (оформяне на решението): синтетично представяне на решението (на базата на съставения план); проверяване правилността на решението, откриване на евентуални пропуски, грешки и отстраняването им; формулиране отговора на задачата.

E_4: Допълнителна работа по задачата след намиране на решението ѝ – "Поглед назад" (по Д. Пойа): търсене на други начини за решаване (констатиране, че чрез наличните знания от теорията и наличните умения за търсене на решения не може, в рамките на учебното време, да се открие друг начин; в случай, че съществуват други начини за решаване - анализиране на тези начини, разкриване на техните силни и слаби страни, изявяване най-рационалния начин); описание на класа задачи, представител на който се явява разглежданата задача, и проверяване общовалидността на използваните методи и евристики при решаване на задачите от съответния ѝ клас; обобщаване на задачата (ако е възможно) и обособяване на по-широк кръг от задачи и съответни на тях методи и евристики за откриване на решения; извършване на други целесъобразни дейности (преобразуване на задачата, съставяне на нови задачи, конструиране на дидактически системи от математически задачи и др.).

Позовавайки се на анализа на дейността моделиране в [1] и [8], можем да твърдим, че при всеки от етапите на идеалния модел на дейността решаване на математически задачи (ДРМЗ) субектът извършва: разпредметяване на обект; асимилация на получения при разпредметяването опит; опредметяване от страна на субекта, при което отработеният опит става модел за конструиране на обекти във външен план. В резултат на умствената му дейност (при всеки от тези етапи), той конструира нещо "материално". Системата от тези "продукти" може да се разглежда като друг вид модел на процеса на решаване на задачата.

А. Манова в книгата [3] разглежда структурата и съдържанието на такъв вид модел специално за текстовите задачи и го нарича "материален модел". Като използваме за база построения от нея модел, описанието на етапите на математическото моделиране в [2], аналогията и рефлексията от нашия опит, построяваме материален модел на дейността решаване на математическа задача $\boldsymbol{Z}$ от определена математическа област $\mathbf{A}$ в случая, когато съществува теоретичен базис (оператор) на $\boldsymbol{Z}$, "ключовите" елементи (клетката на оператора) на който принадлежат на друга математическа област $\mathbf{Б}$. Този материален модел представяме схематично така: $\mathbf{M}_1 \to \mathbf{M}_2 \to \mathbf{M}_3 \to \mathbf{M}_4 \to \mathbf{M}_5 \to \mathbf{M}_6$, където: $\mathbf{M}_1$ е модел на определена проблемна ситуация, построен със средства от математическата област $\mathbf{A}$ (т.е. $\mathbf{M}_1$ е математическата задача $\boldsymbol{Z}$ от областта $\mathbf{A}$); $\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{M}_3$ – евентуални спомагателни модели на $\mathbf{M}_1$, специфични за областта $\mathbf{A}$ (съкратен запис на текста на задачата $\mathbf{M}_1$, представяне на съществени връзки между обекти на $\mathbf{M}_1$ чрез таблици, схеми, чертежи и т.н.); $\mathbf{M}_4$ – модел на $\mathbf{M}_3$ (на $\mathbf{M}_2$ или директно на $\mathbf{M}_1$), при изграждането на който съществено се използват понятия и символи от математическа област $\mathbf{Б}$ (т.е. $\mathbf{M}_4$ е задача $\boldsymbol{Z}'$ от математическата област $\mathbf{Б}$, равносилна на $\boldsymbol{Z}$); $\mathbf{M}_5$ – решение на задачата $\boldsymbol{Z}'$ ($\mathbf{M}_4$) (от областта $\mathbf{Б}$), след проверка на верността му от гледна точка на теорията от същата математическа област; $\mathbf{M}_6$ – решение на задачата $\boldsymbol{Z}$ ($\mathbf{M}_1$) (от областта $\mathbf{A}$), след проверка на адекватността му със съответната ѝ първоначална ситуация. Ще се спрем накратко върху "ключовите" преходи в процеса решаване на задачата $\boldsymbol{Z}$, съответстващ на този материален модел.

I. Преход от M_1 към M_4. Осъществяването на този преход изисква умения, изградени в резултат на системна работа със задачи от вида $\boldsymbol{Z}$ (вж [4]) и умения за рефлексия. Най-често учащият проявява умения за откриване на подходящо съответствие между компонентите на едно или повече твърдения в условието или изискването (заключението) на съответната задача, от една страна, и компонентите на сходни твърдения от областта **Б** – от друга, което би позволило да се заменят ключови дадени или търсени елементи от задачата $\boldsymbol{Z}$ със съответни на тях твърдения от областта **Б**. Опитът показва, че тук на субекта помага най-вече помненето на факти (теореми, формули, забележителни тъждества и т.н.) от различни дисциплини, както и способността за забелязване на сходство между тях.

II. Преход от M_4 към M_5. При този преход може да се прилага, проверен на практика, материален модел на процеса решаване на математическа задача в случая, когато елементите на теоретичния базис на решението ѝ принадлежат на математическата област, от която е задачата (вж [5]). Ще се спрем накратко върху този модел.

В [1] сполучливо са разграничени логическите модели на математическите знания и дейности, в т.ч. знания и дейности съответно на атомарно, молекулярно и клетъчно равнище. За да изгради модел на решението на една задача, когато то е резултат от дейност на по-високо от молекулярно равнище, Ив. Ганчев [3, с. 103] въвежда понятието задача-компонента. Без да нарушаваме общността на въпроса, ще считаме, че моделите на решенията на задачи на атомарно или молекулярно равнище също съдържат, макар и по една "задача-компонента" с теоретична база съответно от предикатната или съждителната логика.

На базата на модели на клетъчно равнище, може да се конструира така наречения "материален модел" на процеса решаване на математически задачи в случая, когато теоретичната база е адекватна на математическата дисциплина, от която е задачата. Ние се ръководим и от факта, че в съответствие с дедуктивната структура на математическото учебно съдържание, теоретичните базиси (като елементи от теорията) на съответните ***задачи-компоненти*** са усвоявани от учениците по-рано във времето и се намират в тяхната "зона на близко развитие" (ЗБР) или в тяхната "зона на актуално развитие" (ЗАР), т.е. те се явяват основа за осъществяване на приемственост в съдържанието, похватите, средствата и други, свързани с тях компоненти на методическата система за обучаване в решаване на задачи. Съобразявайки се с това обстоятелство, и по аналогия с [9], приемаме следните означения:

— $\mathbf{M}_4$ е моделът, чрез който математическата задача ($\boldsymbol{Z}'$) от областта **Б** описва съответно трансформираната "математическа ситуация" от областта **А**;

— $\mathbf{M}_4'$ и $\mathbf{M}_4''$ са евентуално изградени модели, еквивалентни на $\mathbf{M}_4$, но изявяващи "по-опростени" ключови взаимовръзки, т.е. те се явяват негови спомагателни модели;

— $\mathbf{M}_4'''$ е системата от съответните задачи-компоненти, използвани при решаването на задачата $\boldsymbol{Z}'$ (които за учениците са достъпни задачи-математически модели);

— $\mathbf{M}_4^{\mathrm{iv}}$ представя **системата** от отговори на задачите-компоненти;

— $\mathbf{M}_5$ е отговорът на задачата $\boldsymbol{Z}'$ (последния от отговорите в $\mathbf{M}_4^{\mathrm{iv}}$).

Тогава схемата $\mathbf{M}_4 \to \mathbf{M}_4' \to \mathbf{M}_4'' \to \mathbf{M}_4''' \to \mathbf{M}_4^{\mathrm{iv}} \to \mathbf{M}_5$ може да се разглежда като материален модел на процеса решаване на математическа задача в случая, когато нейната теоретична база се състои от елементи на математическата област **Б**, от която е задачата.

III. Преход от $\mathbf{M}_5$ към $\mathbf{M}_6$. Осъществяването на този преход изисква умения за финализиране на цикъла на дейността моделиране, последният етап от който е интерпретация и пренос на знания от модела към обекта, в случая – от модели със средствата на областта **Б** към модели със средства от областта **А**.

В [3, с. 45] е представена връзката между идеалния и материалния модели на процеса решаване на текстова задача, а в статията [9] – подобрен модел на тази връзка, основаващ се на тълкуванията на моделите $\mathbf{M}_5$ и $\mathbf{M}_6$ в [2], както и на функционалния анализ на задачата от гледна точка на ориентираното движение в [7]. Поради сходството в моделите, посочени тук и в [9], може по аналогия да се състави и комплексен модел на дейността решаване на математическа задача въз основа на знания от математическа област, различна от тази, от която е задачата. Този модел представяме на фиг. 1.

Приложимостта на комплексния модел ще демонстрираме със следния пример за съставяне на дидактическа система от еквивалентни помежду си задачи от различни математически области. Известна е следната алгебрична

Задача $\boldsymbol{Z}$. *Да се докаже, че ако $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $a^2+b^2=c^2$, то $a+b \le c\sqrt{2}$.*

<u>I начин.</u> Считаме, че моделът $\mathbf{M}_1$ съвпада с модела $\mathbf{M}_4$, игнорирайки моделите $\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{M}_3$, т.е. търсим решение на $\boldsymbol{Z}$ с теоретична база от алгебрата (областите **А** и **Б** "съвпадат").

Можем да разграничим задачите-компоненти $\boldsymbol{Z}_1$, $\boldsymbol{Z}_2$, $\boldsymbol{Z}_3$ и$\boldsymbol{Z}_4$:

Да се докаже, че съответно: ако $c \neq 0$, то $a^2+b^2=c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$; ако $c \neq 0$, то $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)^2 \le \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c}-\frac{b}{c}\right)^2$; $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c}-\frac{b}{c}\right)^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$ и ако $c>0$, $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}>0$ и $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, то $a+b \le c\sqrt{2}$.

<u>II начин.</u> От условието следва, че $c^2 > a^2$ и $c^2 > b^2$, а от тук, поради $a>0$, $b>0$, $c>0$, можем да запишем неравенствата $c>a$ и $c>b$, т.е. $0 < \frac{a}{c} < 1$ и $0 < \frac{b}{c} < 1$. Тогава, ако представим условието във вида $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, а заключението: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} \le \sqrt{2}$ то, полагайки $\frac{a}{c} = \sin\alpha$ и $\frac{b}{c} = \cos\alpha$, получаваме известната тригонометрична

Задача Z'. *Да се докаже, че ако $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\sin\alpha + \cos\alpha \le \sqrt{2}$.*

За решаването ѝ могат да се използват следните задачи-компоненти:

Z'_1: Да се докаже тъждеството $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$;

Z'_2: Да се докаже, че ако $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $0 \le \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$.

Интерпретацията на решението на $\boldsymbol{Z'}$ в областта на алгебрата е очевидна.

<u>III начин.</u> Равенството $a^2+b^2=c^2$ ни напомня теоремата на Питагор. Тогава, въз основа на обратната ѝ теорема, задачата $\boldsymbol{Z}$ може да се преформулира в


АСИМИЛАЦИЯ НА ОПИТ
РАЗПРЕДМЕТЯВАНЕ
ИДЕАЛЕН МОДЕЛ
МАТЕРИАЛЕН МОДЕЛ
ОПРЕДМЕТЯВАНЕ
Изучаване и разбиране на М1 (схематично и графично моделиране)
М1 – ЗАДАЧА Z ОТ МАТЕМАТИЧЕСКА ОБЛАСТ А
Изграждане на идея за целесъобразно преформулиране на задача Z чрез понятия и символи на друга математическа област Б (вътрешно математическо моделиране) на базата на взаимосвързани факти от областите А и Б
М2, М3 – СПОМАГАТЕЛНИ МОДЕЛИ
М4 – ЗАДАЧА Z' ОТ МАТЕМАТИЧЕСКА ОБЛАСТ Б
Усвояване на М4 (евентуално схематично, графично и други видове моделиране)
М4', М4'' – СПОМАГАТЕЛНИ МОДЕЛИ
Прилагане на определени общологически и частни методи за съставяне на система от задачи-компоненти от изучени теми Б1,Б2,..,Бk, k∈ N от областта Б, решенията на които образуват решението на задача Z'
М4''' – СИСТЕМА ОТ МАТЕМАТИЧЕСКИ ЗАДАЧИ-КОМПОНЕНТИ Z1,Z2,..,Zn, n∈ N, ОТ ОБЛАСТИТЕ Б И А
Решаване на задачите Z1,Z2,..,Zn, в последователност, определена от връзките им в системата
М4IV – СИСТЕМА ОТ ОТГОВОРИ НА МАТЕМАТИЧЕСКИТЕ ЗАДАЧИ Z1,Z2,..,Zn КАТО МЕЖДИННИ И КРАЕН РЕЗУЛТАТИ
Проверка на решенията на задачите Z1,Z2,..,Zn и проверка адекватността на връзките им с решението на задача Z
М5 – ОТГОВОР НА ЗАДАЧАТА Z' (ОТ ОБЛАСТТА Б)
Интерпретация и съдържателно оценяване на М5 (конкретизиране на модела М5) в областта А.
М6 – ОТГОВОР НА МАТЕМАТИЧЕСКАТА ЗАДАЧА Z (ОТ ОБЛАСТТА А)
„Поглед назад"

Фиг. 1

Задача $\boldsymbol{Z''}$. *Да се докаже, че ако a и b са катети в правоъгълен триъгълник, а c е хипотенузата му, то в сила е неравенството $a+b \leq c\sqrt{2}$.*

Тук могат да се обособят задачите-компоненти Z''_1, Z''_2, Z''_3, Z''_4 и Z''_5 (използваме традиционните означения на елементите на правоъгълния триъгълник): Да се докаже, че съответно: $h_c \leq m_c$, $m_c = \dfrac{c}{2}$, $a.b = c.h_c$, $(a+b)^2 = c^2 + 2c.h_c$ и $(a+b)^2 \leq 2c^2$.

Преходът от $\mathbf{M}_5$ към $\mathbf{M}_6$ е очевиден.

<u>IV начин.</u> Ако a и b разглеждаме като променливи, а c – произволно фиксирано положително число, то $a^2+b^2=c^2$ е уравнение на окръжност с център началото на координатната система Oab и радиус $r=c$. Тогава, задачата $\boldsymbol{Z}$ може да се преформулира в

Задача $\boldsymbol{Z'''}$. *Да се докаже, че за координатите a и b на всяка точка M от дъгата в I квадрант от окръжността с уравнение $a^2+b^2=c^2$ е изпълнено неравенството $a+b \leq c\sqrt{2}$.*

За голяма част от учащите решаването на задача $\boldsymbol{Z'''}$, като се използва равносилността ѝ с някоя от задачите $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Z'}$ и $\boldsymbol{Z''}$, е по-рационално, отколкото решаването ѝ в областта на аналитичната геометрия. Изобщо ще отбележим, че всяка задача от получената система ($\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Z'}$, $\boldsymbol{Z''}$ и $\boldsymbol{Z'''}$) може да се разглежда като изходна, а останалите – като подходящи различни нейни "вътрешно" математически модели, които могат да се използват за откриване на нестандартни решения на изходната задача. При методическа работа със студентите е целесъобразно в етапа "Поглед назад" да се оцени сложността на всяка от задачите от системата, да се изяви най-сложната от тях, която да бъде предлагана на учениците в качеството на изходна.

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Ганчев. Основни учебни дейности в урока по математика (синтез на резултати от различни изследвания), София, Модул-96, 1999.

[2] И. Ганчев, Ю. Нинова, В. Никова. Методика на обучението по математика (обща част). Благоевград, 2002.

[3] А. Ф. Манова. Текстовите задачи в началното обучение по математика. Благоевград, 1989.

[4] А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонски, М. С. Якир. Неочаквана стъпка или сто и тринадесет красиви задачи. София, Академично издателство "Проф. Марин Дринов", 1994.

[5] В. Милушев, Д. Френкев, Д. Милушева-Бойкина. Идеален и материален модел на процеса решаване на математически задачи. В: Юбилейна национална конференция с международно участие, СУБ – Смолян, 20–21.X.2006 г.

[6] В. Милушев, Д. Френкев. Една трактовка на понятието модел и направления за използване в обучението по математика. *Научни трудове на ПУ*, **39**, кн. 2, 2002, 41–52.

[7] Р. Трашлиев. Задачата (психолого-педагогически проблеми). София, 1989.

[8] Д. Френкев, В. Милушев. Анализ на дейностите моделиране и конкретизиране на модел. *Научни трудове на ПУ*, **39**, кн. 2, 2002, 63–72.

[9] Д. Френкев, Д. Бойкина. Относно съдържанието и структурата на дейността решаване на текстови задачи. *Научни трудове на ПУ*, **39**, кн. 2, 2002, 53–62.

Васил Борисов Милушев
ул. "П. Д. Петков" № 39, ап. 8
4000 Пловдив, България
e-mail: milushev@pu.acad.bg

Димитър Георгиев Френкев
ул. "Деспот Слав" № 28
4700 Смолян, България
e-mail: d_frenkev@abv.bg

Добринка Василева Милушева-Бойкина
бул. "Цариградско шосе" № 45, ап 22
4006 Пловдив, България
e-mail: boikina@pu.acad.bg

A COMPLEX MODEL OF THE PROCESS OF SOLVING OF MATHEMATICAL PROBLEMS OF A CERTAIN TYPE

Dimitar G. Frenkev, Vassil B. Milloushev, Dobrinka V. Boikina

In the paper a complex (ideal-material) model of the process of solving of problems out of a certain mathematical field using elements of the same or another mathematical field is constructed. The application of the model is demonstrated for creating didactical systems of problems with great forming potential in educative and methodical aspect.