

МАТЕМАТИЧЕСКИ МЕТОДИ И СЪВРЕМЕННИ ТЕНДЕНЦИИ ПРИ ГЛОБАЛНАТА ПОЗИЦИОНИРАЩА СИСТЕМА (GPS)

Камен Иванов

Разгледани са устройството и принципите на действие на Глобалната Позиционираща Система (GPS). Приведени са основните идеи, използвани при определяне на координатите на даден GPS потребител и на спътниците от системата. Обсъдени са редица физически и математически проблеми, свързани с повишаване точността на измерванията и пресмятанията в реално време.

1. Устройство и общи принципи на Глобалната Позиционираща Система. Глобалната Позиционираща Система (GPS) има за цел определянето в реално време на позицията, скоростта и точното време на различни обекти, намиращи се на земната повърхност или в близост до нея. Измерването се извършва от самите обекти без излъчване на сигнали, а само въз основа на приемане на сигнали, излъчени от спътници. Използвани са данни от книгата на Hofmann-Wellenhof и Moritz [2], от официални за системата интернет сайтове, като

<http://tycho.usno.navy.mil/gps.html> и <http://www.navcen.uscg.gov/>,
и от <http://www.kowoma.de/en/gps/index.htm>.

1.1. Устройство. Единствена изцяло функционираща Глобална Позиционираща Система в настоящия момент е изградена от Правителството на САЩ и се състои от три части:

- **съзвездие от (поне) 24 спътника**¹, разделени в 6 групи. Всяка група се състои от 4 спътника, обикалящи на равни интервали по една и съща кръгова земна орбита с наклон към екватора 55° и период от 12 часа. Затова във фиксиран момент на всеки *астрономичен* ден позицията на даден спътник е една и съща и, като следствие, спътникът се появява с 4 минути по-рано всеки ден, гледано от някоя точка на повърхността на Земята. Спътниците се движат на височина от около 20 200 km над земната повърхност (средна земна орбита).
- **контролираща част**, състояща се от 5 *центъра за наблюдение*, разположени в Hawaii, Kwajalein (Северен Тих океан), Ascension Island (Южен Атлантически океан), Diego Garcia (Индийски океан), Colorado Springs, 3 *земни антени* (предаватели) – в Ascension Island, Diego Garcia, Kwajalein и *главен контролен център*, разположен в Колорадо, САЩ (Schriever Air Force Base, Colorado Springs, Colorado, USA).

¹В началото на 2009 г. системата използва 31 спътника.

- **потребители**, всеки от които притежава приемник с антена, стабилен часовник и процесор, служещи за определяне на позицията, скоростта и точното време на мястото на потребителя.

1.2. Общи принципи. Всеки от спътниците постоянно излъчва сигнали, съдържащи позицията на спътника (три пространствени координати) и момента на излъчване на сигнала (четвърта времева координата), измерен със собствения атомен часовник. Всеки потребител приема излъчваните от видимите спътници сигнали и, благодарение на тях, определя собствената си позиция (и време) в същата координатна система. За осъществяване на тази дейност *потребителите не излъчват и не отразяват сигнали*, поради което могат да функционират с минимален разход на енергия.

Принципът, използван при определяне *позицията и времето на потребителя*, е описан в §2.1. За неговото осъществяване е необходима голяма точност на предаваните от спътниците данни за собствената им позиция и време. Принципите за определяне на *пространствените координати на спътниците* са скицирани в §3.2.

Контролиращата част на GPS осигурява точността на данните, излъчвани от спътниците. Центровете за наблюдение приемат сигналите с позицията и времето на видимите спътници и съотнасят тези данни към наблюдаваните им позиции и към часовниците в центровете. Информацията се предава на главния контролен център, който я съгласува за всеки спътник по отделно и определя какви корекции са необходими в съобщенията му. Тези корекции се предават на спътниците чрез земните антени. Часовниците на спътниците, на центровете за наблюдение и на главния контролен център трябва да са синхронизирани с *универсалното координатно време (UTC)* с точност от няколко наносекунди. Тъй като поправките в орбита са трудни, то спътниците в своите съобщения предават и отклонението на часовниците им от UTC, пресметнато на базата на получените от земята данни.

Системата е предназначена да се ползва едновременно от различни категории потребители, както военни, така и цивилни. Приема се, че точността, която могат да постигнат военните потребители, е няколко пъти по-добра от тази на цивилните. Това се постига чрез ограничаване достъпа на различните видове потребители до съдържанието на някои от излъчваните сигнали чрез кодирането им с различни псевдо-случайни кодове.

1.3. Характеристики на сигналите на спътниците и видове кодове. GPS сигналите се разпространяват със скоростта на светлината и имат носещи честоти в микро-вълновата част на електро-магнитния спектър: първата честота е $L1 = 1575.42$ MHz, а втората – $L2 = 1227.6$ MHz.² Върху тези честоти се използват 3 псевдо-случайни кода (pseudo-random noise codes):

- грубият код (coarse/acquisition code) е съобщение с дължина 1023 бита излъчвано всяка милисекунда, по-точно – с честота 1.023 MHz. Всяко съобщение съдържа момента на излъчването му, координатите на спътника в този момент, идентификация на спътника и др. Кодът е свободен за цивилни и военни нужди. Първоначално кодът е използван само върху $L1$ носеща честота. Втори цивилен груб код, базиран на честота $L2$ и означен с $L2C$, започва да се

²През 2009 г. е планирано пускането на първия спътник, предаващ на трета цивилна честота $L5=1176.45$ MHz. Честотите, означавани с $L3$ и $L4$, са само за военни цели.

излъчва за първи път от пуснатия на 12 декември 2005 година спътник.

- прецизният код (precision code) е с честота 10.23 МHz, наричана основна честота (fundamental frequency), и е достъпен само за военни цели. Той се предава едновременно на всички носещи честоти, използвани от системата.
- предпазният код (Y code) замества прецизния код, когато системата започне да действа в режим, предпазващ от нежелано външно вмешателство (anti-spoofing mode).

Двете честоти L1 и L2 представляват основната честота на прецизния код, умножена по 154 и 120 съответно. Те са подбрани така, че да се избегне в максимална степен главната причина за грешки при разпространението – пречупването на сигнала при преминаване през йоносферата.

2. Определяне позицията и времето на GPS потребителя. Този параграф съдържа кратко описание на *принципа* за определяне позицията и времето на потребителя. Предполага се, че спътниците предават “точно” своето положение по отношение на декартова координатна система, неподвижно свързана със Земята (виж §3.1), в близки равноотстоящи моменти на универсалното координатно време.

2.1. Постановка на задачата. Нека GPS потребителят вижда (т.е. приема сигнали от) k спътника в даден момент. Излъчваните през малки интервали от време сигнали на спътника j , $j = 1, \dots, k$, съдържат четворката числа $(t, x_j(t), y_j(t), z_j(t))$, където t е времето на сигнала, измерено от часовника на спътника, и $(x_j(t), y_j(t), z_j(t))$ са координатите на спътника в този момент. Задачата е как потребителят, който постоянно приема сигналите от няколко спътника, да определи положението си (X, Y, Z) в същата координатна система. Ако потребителят въз основа на своя часовник определи, че сигналът от спътника j е пътувал Δt_j секунди до приемането му, то той пресмята, че се намира на разстояние

$$(1) \quad R_j = c\Delta t_j$$

от съответния спътник, където c е скоростта на разпространение на сигнала (в този случай това е скоростта на светлината $c = 299\,792\,458$ m/s).

Методът за определяне положението на дадена точка, ако са известни разстоянията ѝ до няколко точки, е добре известен и носи името “трилатерация” (trilateration). При зададени 3 точки в тримерното пространство и 3 разстояния в общия случай съществуват 2 точки, които се намират на тези разстояния от съответните точки.³ За обекти, намиращи се близо до повърхността на Земята, тази информация е достатъчна, защото едното от двете решения – по-отдалеченото от центъра на координатната система – се елиминира.

Но даже малки неточности при измерване на времето предизвикват големи неточности в разстоянията R_j защото константата c в (1) е много голяма – нека припомним че за 10 наносекунди (немислима точност за практически всички земни часовници) светлината изминава 3 m. Следователно решение, получено по такъв начин, би било неточно, ако не се вземе предвид грешката на числото Δt_j . Тя има два основни компонента – грешка на часовника на спътника и грешка на часовника на потребителя δ , измерени спрямо UTC. GPS полага значителни усилия (виж §1.2) за отчитане на грешките на часовниците на спътниците, като ги моделира с полином,

³Разбира се, задачата също така може да има 0, 1 или безброй решения.

чийто коефициенти се предават със спътниковото съобщение. Това позволява потребителят да пресметне точния момент в UTC на изпращане на съобщението. Остава грешката на часовника на потребителя, която ще добави грешка $c\delta$ към определеното разстояние. В строг смисъл δ е функция на t и това затруднява определянето на положението на потребителя. Затова основно изискване към часовника на потребителя е отклонението δ от UTC да е максимално близко до константа. Тази константа не е известна предварително и се разглежда като допълнително неизвестно δ .

Тъй като разстоянието между спътника j и потребителя е

$$\sqrt{(x_j(t) - X)^2 + (y_j(t) - Y)^2 + (z_j(t) - Z)^2},$$

то от (1) получаваме системата

$$(2) \quad \sqrt{(x_j(t) - X)^2 + (y_j(t) - Y)^2 + (z_j(t) - Z)^2} + c\delta = R_j, \quad j = 1, \dots, k.$$

В (2) неизвестните са X , Y , Z и δ , а числата R_j , зададени с (1), са получени в резултат на измерване. В j -тото уравнение, $j = 1, \dots, k$, координатите на спътника $(x_j(t), y_j(t), z_j(t))$ се съдържат в съответните съобщения и са известни за дискретни стойности на t , различни за всеки спътник. За да има (2) смисъл, трябва координатите на спътниците да са известни в един и същи момент. Това се постига чрез интерполация на функциите $(x_j(t), y_j(t), z_j(t))$. Нека отбележим, че при решаване на системата (2), освен координатите X, Y, Z , получаваме и числото δ , което представлява добро приближение на отклонението на часовника на потребителя от универсалното координатно време UTC.

2.2. Колко спътника са необходими за определяне координатите на потребителя? Тъй като (2) има 4 неизвестни, то броят k на спътниците, видими от потребителя, трябва да е поне 4. При $k = 4$ системата има отново 2 решения, като по-отдалеченото от центъра на координатната система (виж §3.1) се елиминира. При $k > 4$ системата (2) е преопределена и се “решава” с подходящи методи, например метод на най-малките квадрати.

Изискването “от всяка точка на земната повърхност да се виждат във всеки момент поне 4 спътника” оказва силно влияние при определяне на конфигурацията на спътниците⁴. Сега видимите спътници са поне 6, като средният им брой е 9. При определяне координатите си потребителят обикновено избира четири от видимите спътници така, че ъглите между тях да са *максимално отдалечени* от 0 и от π .

Необходимият брой спътници може да е по-малък от 4 при наличие на допълнителна информация за потребителя. Ако височината на потребителя е известна по принцип (например при GPS устройства за определяне положението на автомобили върху пътна карта), то са достатъчни 3 спътника. Ако освен това потребителят притежава много точен часовник (поддържащ точно време от момента, когато са били видими повече спътници), то са достатъчни и 2 спътника.

2.3. Източници на грешка. Нespoменатите до тук източници на грешки се групират в няколко категории по своя произход. Това са:

1. *физически закони, включени в математическия GPS модел.* Такива са релативистичните ефекти и ефекта на Sagnac. Те не са обяснени в статията.

⁴Първоначалната идея за GPS е предвиждала 8 групи от по 3 спътника.

2. *физически явления, чието влияние се минимизира с технически средства.* Примери са естествените смущения на сигнала (при преминаване през йоносферата, слънчев вятър и т.н.) или приемането на отразени сигнали от потребителя (при пресечен терен).
3. *умишлено подаване на сигнал с лъжливи данни от външен за GPS източник.* Военните потребители избягват този проблем чрез Y-кода (виж §1.3), докато гражданските потребители не притежават по принцип средства за успешно противопоставяне.
4. *умишлено подаване на сигнал с лъжливи данни от вътрешен за GPS източник.* Вътрешният източник обикновено е администратора на системата, който има възможност да активира така наречения **избирателен достъп** (Selective Availability) – съзнателна промяна на излъчваните в *грубия код* (виж §1.3) данни за позицията и времето на спътника. Целта на тази опция е предотвратяване на възможността за използване на GPS за “вражески” цели. Тя е прилагана постоянно до 2000 година, когато е престанала да се използва по следната причина. По време на Войната в залива през 1990–1991 г. се оказва, че съюзническите военни не могат да доставят достатъчно количество GPS оборудване, работещо с прецизния код. Затова много войници са определяли неточно положението си, тъй като са били принудени да ползват граждански GPS устройства (чиито данни са били неточни поради активирания избирателен достъп).

За да преодолеят грешката от т. 4, гражданските потребители използват комбинация от няколко средства: определяне на позицията на потребителя по отношение на друг обект с известни GPS координати (Differential GPS), например предавателя на GSM оператор или калибриране на уреда на подходящо място, или следене изменението на допълнителни физически параметри, като атмосферно налягане.

2.4. Точност на GPS измерванията. Поради разнообразието на източници на грешки, както и начини за преодоляването им, е трудно да се дадат общи достоверни граници на точността при измервания с GPS *уреди*. По принцип това се прави от производителите на съответните уреди, като в оценките се използват редица условия.

През 90-те години на 20-ти век са дадени следните оценки на грешката на GPS *метода*, описан в §2.1, при използване на *грубия код* (§1.3) и при действието на избирателния достъп (т. 4 на §2.3): хоризонтална точност от 100 m, вертикална точност от 156 m и точност на отклонението от UTC от 340 ns (наносекунди).⁵ Тъй като основният източник на тези грешки е премахнатият избирателен достъп, то през 2001 г. оценките са: хоризонтална точност от 13 m и вертикална точност от 22 m. Ако се използва и сигнала, предаван на втората гражданска честота L2C, както и ако се прилагат комбинации от методи за минимизиране на грешката, то оценките на грешката за граждански потребители в началото на 21-ви век са от порядъка на няколко метра. Военните потребители често достигат грешки под 10 cm.

3. Определяне позицията на GPS спътника. Собствените координати, които всеки GPS спътник предава с всяко излъчено съобщение, се определят значително

⁵Посочените тук оценки са валидни за 95% от измерванията.

по-трудно, защото е необходимо точно описание на движението на спътника в земното гравитационно поле. Изборът на подходяща координатна система също е от основно значение.

3.1. Координатна система. Положенията на спътниците и на GPS потребителите първоначално се пресмятат по отношение на Световната Геодезична Система (World Geodetic System 1984 – WGS 84). След това, ако е необходимо, положението на потребителя се прехвърля към локална координатна система със смяна на променливите.

WGS 84 е декартова координатна система, “неподвижно” свързана със Земята, като координатната равнина Oxy съвпада с екваториалната равнина (оста Ox е насочена по средната стойност на Гринуичкия меридиан), а оста Oz – по оста на въртене на Земята. WGS 84 е геоцентрична, т.е. центърът на тежестта на Земята и центърът на координатната система съвпадат.

Без да навлизаме в детайли ще отбележим само няколко проблема, свързани с определянето на такава координатна система:

- Земята не е абсолютно твърдо тяло. По-точно е твърдението, че Земята може да се разглежда като еластично тяло с течно ядро, което е подложено на малки, донякъде периодични, промени.
- Определянето на центъра на тежестта е проблематично, защото дори за твърдите тела обикновено не е вярно, че математическият център съвпада с физическия. Използването на първия закон на Кеплер, който би позволил определянето на центъра на тежестта като фокус на елиптичните орбити на спътниците, среща също редица проблеми (виж §3.2).
- Ротационната ос на Земята не е фиксирана нито спрямо неподвижните звезди, нито спрямо самата Земя (движение на полюсите, наричано още ефект на пумпала).

В координатната система на WGS 84 Земята се приближава с ротационен елипсоид

$$(3) \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Полуосите a и b са част от параметрите, възприети от системата. Стойностите на основните параметри на WGS 84 във версията от 2 януари 1994 г. са: главната полуос на елипсоида (екваториален радиус на Земята) $a = 6.378137 \cdot 10^6$ m, сплескването на Земята $f = 1/298.257223563$, ъгловата скорост на Земята $\omega = 7.292115 \cdot 10^{-5}$ rad s⁻¹ и геоцентричната гравитационна константа на Земята (произведението на гравитационната константа и масата на Земята) $GM = 3.986004418 \cdot 10^{14}$ m³s⁻². Като произведен параметър на WGS 84 се получава малката полуос на елипсоида $b = a(1 - f) = 6.356752314 \cdot 10^6$ m. Тези параметри са използвани по-долу.

3.2. Земно гравитационно поле и орбита на спътника. Движението на спътниците се определя от Закона на Нютон за гравитацията. Гравитационният потенциал на Земята в точката (x, y, z) се задава с простата формула

$$(4) \quad V(x, y, z) = G \iiint_E \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta,$$

където G е гравитационната константа, E означава Земята, като тримерно твърдо тяло, и $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ е плътността на Земята в точката (ξ, η, ζ) . Точка от околността на

Земята, освен гравитационна, изпитва и центробежна сила. Така потенциалът на земното поле се задава с формулата

$$(5) \quad W(x, y, z) = V(x, y, z) + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2),$$

където ω е ъгловата скорост на въртене на Земята. Тогава векторът на ускорението, предизвикано от земното поле, е $(\partial W/\partial x, \partial W/\partial y, \partial W/\partial z)$. Ако координатите на тяло в момента от времето t са $(x(t), y(t), z(t))$, то движението му в полето на Земята се описва със системата диференциални уравнения

$$(6) \quad \left(\frac{d^2x}{dt^2}(t), \frac{d^2y}{dt^2}(t), \frac{d^2z}{dt^2}(t) \right) = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right) (x(t), y(t), z(t)).$$

Уравненията (4-6) позволяват *по принцип* да се определи движението на спътника. Но за съжаление функцията ρ в (4) е неизвестна и за сега не знаем как да я измерим. Затова, при използване на (5) за пресмятане, потенциалът $V(\xi, \eta, \zeta)$ се замества с нормалния гравитационен потенциал $U(\xi, \eta, \zeta)$. Това е функцията, която се получава в (4) след заместване на E с “най-добре” приближаващия Земята ротационен елипсоид (3) и плътността ρ – със средната ѝ стойност. Означавайки с $T = V - U$ грешката при тази апроксимация, от (5) получаваме

$$(7) \quad W(x, y, z) = U(x, y, z) + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + T(x, y, z).$$

Първите две величини в дясната страна на (7) са пряко изчислими и се определят от параметрите на WGS 84. Нека отбележим, че потенциалите U и V , както и грешката T , известна като *anomalous potential* или *disturbing potential*, са хармонични функции. Затова T обикновено се приближава с частичната сума на ред по сферични хармоники, който в сферични координати (r, θ, λ) има вида:

$$(8) \quad T(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{a} \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} [c_{n,m} \cos m\lambda + s_{n,m} \sin m\lambda] \tilde{P}_{n,m}(\cos \theta).$$

В (8) с $\tilde{P}_{n,m}$ означаваме нормализираните в L_2 асоциирани функции на Лъжандър от първи вид $P_{n,m}$, където

$$P_{n,m}(t) = \frac{1}{2^n n!} (1-t^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2-1)^n.$$

Функциите $r^{-n-1} \tilde{P}_{n,m}(\cos \theta) \cos m\lambda$ и $r^{-n-1} \tilde{P}_{n,m}(\cos \theta) \sin m\lambda$ са хармонични (удовлетворяват уравнението на Лаплас в \mathbb{R}^3), докато тяхните рестрикции върху сферата $r = 1$, т.е. функциите $\tilde{P}_{n,m}(\cos \theta) \cos m\lambda$ и $\tilde{P}_{n,m}(\cos \theta) \sin m\lambda$, удовлетворяват уравнението на Лаплас-Белтрами.

Коефициентите в (8) за $n = 0, 1$ зависят от координатната система и за посочения в §3.1 избор са 0. Останалите коефициенти $c_{n,m}$, $m = 0, \dots, n$, $n = 2, \dots, N$, и $s_{n,m}$, $m = 1, \dots, n$, $n = 2, \dots, N$, в (8) задават приближението на T . Тук няма да се спираме на тяхното пресмятане – сложна задача, която изисква много измервания и сериозни изчислителни ресурси. Първият коефициент $c_{2,0}$ зависи от сплескването f и от полюсите a и b във възприетия модел на Земята (3). Той е определен през 1884 г. от немският геодезист Ф. Р. Helmert, който пресмята добро приближение за големината на земното сплескване, наблюдавайки измененията на лунната орбита. Около 1980 г. са пресметнати коефициентите до $N = 36$, след 1995 г. – до $N = 360$, а през

май 2008 г. се появи модел с $N = 2160$. Нека отбележим, че броят на коефициентите в (8) за $0 \leq n \leq N$ е $(N + 1)^2$.

Едно от широко популяризираните през 60-те години на 20-ти век постижения на НАСА е, че “Земята не е елипсоид, а повече прилича на круша”. Измерените с помощта на спътници отклонения от елипсоида са около 30 m при полюсите и представляват стойността на $c_{3,0}$ (умножен със скалиращ множител). За сравнение разликата в полюсите на елипсоида е над 20 km.

Зададената с (6–8) орбита не е точно елиптична. Движението на спътника може да се опише на движението на автомобил по хълмист път с дупки. Коефициентите $c_{n,m}$ и $s_{n,m}$ с малки индекси n определят хълмовете, а с по-големи – дупките. В уравнението (8) отношението r/a е около 4. Затова членовете с $n > 20$ в (8) нямат практическо значение за пресмятане движението на спътника. Но увеличаването на N води до пресмятане на нови по-точни стойности на влизащите в (8) коефициенти (включително за $n = 2$ и $n = 3$), а от там и до по-точно пресмятане на орбитите.

3.3 Определяне на геоида. Редица геофизични величини: големината и посоката на земното привличане; направлението, в което се намира центъра на земята; отклоненията на отвеса от вертикала и др. могат да бъдат пресметнати с висока точност от уравненията (7–8), когато са известни много от коефициентите в (8). Тези величини се изразяват чрез различни производни на потенциала (7).

Тук ще опишем накратко само една задача, пряко свързана с работата на потребителските GPS устройства – определянето на геоида. След като GPS устройството пресметне положението на потребителя в декартова координатна система, то трябва да прехвърли данните в локална координатна система: географска ширина, географска дължина и *надморска височина*. Определянето на надморската височина е свързано със знанието на “морското ниво” в близост до точката. Определението за “морско ниво”, т.е. на формата на Земята, е дадено от Гаус, който е въвел понятието “геоид”. Геоидът е *еквипотенциалната* повърхнина

$$(9) \quad W(x, y, z) = W_0,$$

за която константата W_0 е определена така, че повърхнината (9) се отличава *средно* най-малко от морското равнище (там където има океани). Задачата за определяне на геоида представлява пресмятане на разликата между повърхнината (9) и елипсоида (3). Тази разлика е до ± 110 m. Неточното задаване на геоида в потребителските GPS устройства е един допълнителен източник на грешка. Нека отбележим, че в резултат на морските течения, приливите и отливите истинското равнище на океаните се отличава от геоида до ± 10 m.

3.4. Някои съвременни методи за пресмятане на геофизични величини. Редица величини, използвани в геодезията, океанографията, геофизиката (виж споменатите в §3.3) и други науки, се пресмятат като стойности на сферични полиноми от висока степен. Тези пресмятания пораждаат проблеми и за трите основни изчислителни показателя: точност, скорост и обем на използваната компютърна памет.

Да разгледаме задачата за пресмятане на полинома (8) с $N = 2160$ в дадени K точки, $K > N^2$, произволно разположени върху сферата $r = a$. За да може пресмятанията да се извършат в реално време, задачата се разделя на две подзадачи:

- (i) пресмятане на полинома в равномерна спрямо сферичните координати (θ, λ) мрежа с размери $N \times 2N$ или $2N \times 4N$;

(ii) пресмятане стойностите в K точки чрез интерполация на резултата от (i).

Задачата (i) може да бъде изпълнена за $O(N^3)$ операции при използване на едномерно бързо преобразование на Фурие. (Нека отбележим, че засега **не е открито** двумерно бързо преобразование на Фурие върху сферата.) Методът не работи добре при по-големи размери – при $N > 2800$ се наблюдава или съществена загуба на точност (ако използваните променливи са с double precision) или невъзможност за извършване на пресмятанията в реално време (при използване на по-висока от double precision).

Първият метод за бързи *приблизени* пресмятания в равномерни точки върху сферата е разработен от Driscoll и Healy [1] през 1994 г. За разглежданата от нас задача известните за сега бързи *приблизени* методи са на Mohlenkamp [4] (1999) и на Tugert [6] (2008). Броят операции при тях е от типа $f(\varepsilon)N^{5/2}$ или $f(\varepsilon)N^2(\log N)^5$, където ε е зададената точност, с която трябва да се получи резултата, а f е подходяща функция. Неустойчивостта при увеличаване на N е характерна за тези методи.

Стандартен метод за решаване на задачата (ii) е интерполация с двумерни сплайнни от степени от 5 до 9. Но, за да се постигне необходимата точност в редица приложни задачи, трябва мрежата в задача (i) да има размери по-големи от $10N \times 20N$, което драстично увеличава времето за пресмятане. Като следствие обемът на необходимата оперативна памет за интерполацията в задача (ii) достига и надвишава паметта на съвременните компютри.

Като приложение на изследваните в [3, 5] сферични “needlets” е разработен нов метод за решаване на задачата (ii). Той позволява пресмятане на стойностите на сферичен полином от степен N в K точки с произволна зададена точност ε , ако са известни стойностите на полинома върху мрежа с размер $2N \times 4N$. При това методът е много бърз – броят на операциите е $O(K \log^2(N/\varepsilon) + N^2)$. Допълнителни предимства са устойчивостта и локалността (при пресмятанията се използват само стойности в точки от мрежата, които са в околност на дадената точка).

REFERENCES

- [1] J. R. DRISCOLL, D. M. HEALY. Computing Fourier Transforms and Convolutions on the 2-Sphere. *Advances in Applied Mathematics* **15** (1994), 202–250.
- [2] B. HOFMANN-WELLENHOF, H. MORITZ. *Physical Geodesy*, Springer, 2005.
- [3] K. IVANOV, P. PETRUSHEV, YUAN XU. Sub-exponentially localized kernels and frames induced by orthogonal expansions. *Math. Z.* DOI 10.1007/s00209-008-0469-4, 2009 (to appear).
- [4] M. MOHLENKAMP. A Fast Transform for Spherical Harmonics. *The Journal of Fourier Analysis and Applications* **5**, No 2/3 (1999), 159–184.
- [5] F. J. NARCOWICH, P. PETRUSHEV, J. D. WARD. Decomposition of Besov and Triebel-Lizorkin spaces on the sphere. *J. Funct. Anal.* **238** (2006), 530–564.
- [6] M. TYGERT. Fast algorithms for spherical harmonic expansions II. *Journal of Computational Physics* **227**, No 8 (2008), 4260–4279.

Камен Иванов
Институт по Математика и Информатика
Българска Академия на Науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: kamen@math.bas.bg

**MATHEMATICAL METHODS AND CONTEMPORARY TRENDS IN
DEVELOPING
THE GLOBAL POSITIONING SYSTEM (GPS)**

Kamen Ivanov

The structure and the basic principles of operation of the Global Positioning System are considered. The ideas for determining a GPS user coordinates and the satellites' coordinates are outlined. We discuss a number of physical and mathematical problems connected with the increase of accuracy of the GPS measurements and computations.