МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2009
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2009
Proceedings of the Thirty Eighth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 1–5, 2009

МАТЕМАТИЧЕСКИТЕ ИГРИ КАТО СРЕДСТВО ЗА ОТКРИВАНЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИ ТАЛАНТИ

Сава Гроздев, Светлозар Дойчев

Предложена е дидактическа система от математически задачи-игри за откриване на ученици с изявени способности по математика. Игрите се разглеждат като дидактически ситуации за стартиране на изследователска дейност при решаване на конкретни задачи, за формулиране на хипотези и предлагане на пътища за решаване, както и за потвърждаване на решения.

I. Увод. Едно от най-важните предизвикателства, на които трябва да отговори съвременното обучение по математика, е все по-пълното и точно откриване на учениците с изявени математически възможности. Средствата за идентификация на математическата дарба, предлагани от психолози, педагози и математици, стават все по-многобройни и разнообразни. Едно от тях са математическите игри.

При дефиницията на понятието "математически талант" редица педагози изтъкват като важна характеристика отношението на учениците към математическите игри и техните поведенчески реакции в процеса на участието им в тях. Например в [1], авторите привеждат като типична и важна характеристика на математическите възможности "наслаждението от предизвикателствата на математическите игри и ребуси". Същият критерий е изведен на преден план и в [2]. Причините, поради които в специализираната литература на математическите игри се гледа като на обещаващ инструмент за идентификация на математически таланти, според нас могат да бъдат търсени в няколко различни направления:

– Игровата дейност е основна за определени възрастови групи, например за учениците в предучилищната и началната степен на обучение. Ето защо тя може да бъде надежден инструмент за ранна идентификация, особено в ситуации, в които другите средства не работят достатъчно добре поради липса на стабилни математически познания. Макар при учениците в 5–7 клас игровата дейност да отстъпва на по-заден план, все още нейната роля в дейностите на учениците не трябва да бъде пренебрегвана и затова може да бъде използвана с успех в обучението.
– Участието на учениците в различни игрови дейности не е толкова психически и физиологически натоварващо, каквото положение съществува в повечето компоненти на учебния процес и самоподготовката.
– Игрите и игровите дейности осигуряват на учениците възможност за работа в екип и по този начин спомагат за развитието на техните вербални умения и умения за общуване.

– Игрите подобряват и чисто математическите умения и компетенции на учениците. Тези от обучаваните, с които в образователния процес са използвани игрови средства, увеличават способностите си за решаване на задачи, за анализ на непознати ситуации и за вземане на решение в такива ситуации.
– Участието на учениците в математически игри дава възможност за проява на творчество. Подобно на всеки творчески процес игровата дейност предоставя условия на учениците за откривателство и обобщение.
– В игровата дейност математически надарените ученици проявяват способностите си по характерен и твърде очевиден начин и могат лесно и с висока степен на точност да бъдат идентифицирани.

II. Състояние на проблема . Напоследък игрите се използват все по-често като надежден педагогически инструмент за идентификация и обучение. В [3] са цитирани примери от педагогическата практика в САЩ, Великобритания, Франция, Холандия и други страни. Във възрастовата група 4–7 клас са правени серия от експерименти (успешни, по мнение на техните автори) в България, Русия и Казахстан за използване на математически игри като инструмент за идентификация и обучение. Един такъв експеримент е описан в [4]. Особено богат опит по отношение на използването на математически игри за целите на идентификацията е натрупан в Русия. В тази връзка заслужава да бъде споменато едно популярно руско математическо състезание – турнирът "Ломоносов". В това състезание има отделен модул, посветен на математическите игри. Интересна е препоръката в [5] на един от организаторите на състезанието (С. А. Дориченко) към учителите, които организират математически игри със своите ученици: "За петте часа, определени за турнира, трябва да проведете няколко (3–4) сеанса с математически игри (всеки сеанс за час – час и половина). След запълване на местата не приемайте нови участници до началото на следващия сеанс. Всеки сеанс протича така. Отначало предложете на учениците една от игрите. Те трябва да поиграят на нея помежду си и с Вас. Целта е да се обясни на учениците какво е печеливша стратегия. С помощта на примери трябва да се обоснове фактът, че един от играчите винаги печели независимо от играта на другия. При това можете да подсказвате на учениците или да играете "на ужким". Ако някой ученик предлага неправилна стратегия и е уверен в предложението си, то можете да поспорите с него. Загубете конкретна игра, използвайки неговата стратегия (предупреждение: това не винаги е възможно). Като цяло, игрите са творчески процес. След това, като изиграете с учениците една-две игри, дайте задача за самостоятелно решаване. Учениците трябва да поиграят по двойки или индивидуално, след което всеки сам написва на лист кой от играчите има печеливша стратегия, каква е тази стратегия и защо е печеливша. Съберете решенията на учениците, освободете ги и се пригответе за следващия сеанс. Като резултат трябва да представите списък на най-добре представилите се участници и оценките, които те са получили. Оценките могат да са два вида:

v – поставя се на учениците, справили се със задачата. Тези ученици ще получат диплом за победители в математическите игри.

e – поставя се на учениците, които са се справили добре, но не толкова, че да бъдат обявени за победители. Тези от тях, които са получили още една такава оценка в някой друг модул на състезанието, ще бъдат обявени също за победители в многобоя.

Може да оценявате не само писмените решения, а и цялостната работа на ученика по време на сеанса."

С малки изменения и доуточнения, приведеният цитат е отлична основа на идентификационна процедура посредством математически игри.

III. Педагогически подход. Тъй като настоящата разработка е посветена на откриването на математически таланти, би следвало да отбележим какво ще разбираме под понятието "математически талант". Няма да се спираме на разнообразието от дефиниции и разбирания по този въпрос. Ще се ограничим със схващането, че става дума за ученици с изявени възможности в областта на математиката. Проблемът за идентификацията на такива ученици е сложен, а опитите за разрешаването му много често са противоречиви. Някои наистина талантливи ученици по математика не показват забележителни академични постижения и ентусиазъм по отношение на учебните програми. Вярно е също, че не всички, които постигат високи резултати на тестове и състезания, са непременно талантливи. Добре известно е, че тестовете за математически постижения могат да осигурят стойностни индикации за математически талант, но резултатите от тях трябва да се интерпретират внимателно и не бива да се абсолютизират. Според много учени понятията "математически талант", "математическа дарба" и "математическа способност" се използват обикновено за ученици, чиито математически възможности ги нареждат сред първите 2–3% от населението.

В случай, че идентифицирането се извършва с помощта на математически игри, естествено е да считаме за изявени онези ученици, които стават победители в подобни игри. Основание за това е, че математическите игри фактически създават съответни дидактически ситуации. В [6] са разгледани трите фази на една дидактическа ситуация: акция, формулировка и проверка. Фазата на акцията при конкретна игра отговаря на истинската математика в задачата-игра и се състои в изясняване на стратегията. Във фазата на формулировката се открива кодът на предаване на стратегията, която ще се използва. Най-накрая, във фазата на проверката участниците в играта решават чия стратегия е оптимална. За да отговорят на последния въпрос, те трябва да извършат действия, които оптимизират възможните решения. От педагогическа гледна точка разиграването е изключително важно. Чрез него учениците се научават как да се придвижат от фазата на акцията към фазата на формулировката без пряка намеса на учителя и да се запознаят с всички възможни стратегии. За учителя остава ролята да подготви дидактическата ситуация и да бъде арбитър за спазването на правилата. Мениджъри на фазите са самите ученици. Тази технология създава средство, вдъхновение и индивидуална обучаваща среда за всеки ученик, в която той напредва. За талантливите допълнително се осигурява начин за достигане на подходящо задълбочаване в съдържанието, както и възможност за обобщение.

Математическата игра е всъщност задача, чието решаване не изисква непременно специфични математически познания, теореми, понятия или методи. Но дори и да съществува подобна техника, не е нужно ученикът да има представа за нея. Играта изисква от играчите да стартират изследователска дейност, да формулират хипотези, да предложат пътища за решаване и да потвърдят решенията. Математическата игра осигурява т. нар. външна мотивация у ученика, която я превръща във важен инструмент за учене. Ситуацията наподобява на състезанията и наградите, които по подобен начин осигуряват мотивиращи предизвикателства на изявените ученици по математика.

IV. Дидактическа система от задачи. Ще се спрем на една дидактическа система от математически игри, която според нас може да послужи като средство за идентификация на ученици с изявени математически възможности. Предлаганата система е предназначена за петокласници. Времето на провеждане на самата процедура трябва да е съобразено с усвояването на знанията от цикъл "Аритметика" от учебната програма в пети клас.

Задача 1. Двама играчи играят един след друг, като избират по едно от числата $2, 3, 4, \ldots, 9$. Отначало първият играч си избира едно число, след това вторият умножава избраното от самия него число с числото на първия играч. Полученото произведение се умножава от първия играч с числото, което той е избрал при втория си ход и т.н. Победител е този играч, след чийто ход произведението за първи път става четирицифрено число. Кой от двамата играчи разполага с печелившa стратегия и каква е тя?

Решение: Произведение, което не е надхвърлило 999 и което със следващото умножение може да се направи четирицифрено число, е губещо за играча, след чийто ход това произведение се е получило. Такива губещи произведения за този играч са числата от 112 до 999 включително, но те са печеливши за противника му. Следователно даден играч трябва да "накара" своя противник да получи такова произведение след своя ход. За целта е достатъчно след хода на дадения играч произведението да варира от най-малко 56 до най-много 111. Убеждаваме се, че числовата ос може да бъде разделена на "губещи" и "печеливши" части. Така частта $[56; 111]$ е губеща за противника на дадения играч. В същото време частта $[112; 999]$ е печеливша за дадения играч. Следващата печеливша част за дадения играч е $[7; 55]$, защото след съответен негов ход произведението може да попадне в $[56; 111]$. Става ясно, че $[4; 6]$ е губеща част от числовата ос за противника на дадения играч. Това предопределя наличието на печеливша стратегия за първия играч. С първия си ход е достатъчно той да избере някое от числата 4, 5 или 6. При втория си ход първият играч има възможност да направи така, че произведението да попадне в $[56; 111]$ и да спечели играта при третия си ход.

Тази игра дава възможност да се упражнят операциите умножение и деление на естествени числа (включително и деление с остатък). Освен това поради наличието на краен изход на играта печелившата стратегия може да бъде намерена сравнително лесно. При проявен интерес от страна на учениците и при желание у учителя може да се разгледа и вариант, в който финалът на играта се достига при 6-цифрено или 7-цифрено произведение.

Задача 2. На дъската е записано числото 1 000 000. Двама играчи последователно делят записаното на дъската число на 2, на 5, или на 10. Полученото частно се записва на мястото на делимото. Победител е този, който стигне до 1. Кой от двамата играчи може да спечели играта и как трябва да играе?

Решение: В разлагането на числото 1 000 000 на прости множители участват шест двойки и шест петици. Какъвто и ход да направи първият играч, той променя четността на броя на тези прости множители (на единия или и на двата). Тогава вторият играч има печеливша стратегия. Достатъчно е той да възстановява четността на броя на съответните прости множители.

Играта дава възможност да се оттренира разлагането на прости множители, както и да се усвои популярната в много други задачи идея за четността на дадена величина.

Задача 3. Един след друг двама играчи вземат от чувал с орехи известен брой орехи – най-малко 1 и най-много 4. Печели този, който вземе последния орех в чувала. Кой от двамата играчи може да спечели играта, ако броят на орехите в чувала е:

а) 2009; б) 2010?

Решение: Ако след хода на някой от играчите в чувала останат 5 ореха, то този играч има възможност да спечели играта независимо от хода на противника му. Ако в чувала са останали 10 ореха, можем да направим същия извод за разглеждания играч, защото от 10 този играч лесно довежда ситуацията до 5 ореха в чувала. Ясно е, че "печеливша позиция" в играта за даден играч е броят на орехите в чувала да е кратен на 5 след хода на този играч. Оттук следва, че в а) печеливша стратегия има първият играч – той взема 4 ореха и след всеки свой ход оставя в чувала $5k$, $k \in \mathbb{N}$ ореха. В б) същата стратегия може да се реализира от втория играч.

Горната задача е частен случай на много популярна китайска математическа игра. Освен кратността на 5, разглеждането на играта дава възможност на учениците да проследят и усвоят процеса на решение "отзад напред". Задачата е свързана с понятието "инвариант", на което тук няма да се спираме. Инвариантът в случая е кратността на 5, като вместо 5 може да бъде избрано друго число. Ще споменем също, че вариант на задачата е предлаган например в изпита през 2007 г. за прием след 7 клас и разработка по темата се съдържа в статията на Вячеслав Величков "Математически игри и стратегии", публикувана в бр. 1, 2008 г. на сп. Математика плюс, стр. 29–45.

Задача 4. Двама играчи заместват последователно отляво надясно шестте звездички $******$ с цифри, докато не се получи шестцифрено число. Първият играч не може да започва с 0. Ако полученото число се дели на n, играта печели вторият играч, а в противен случай – първият. Кой от двамата играчи може да спечели играта и как трябва да играе, ако:

а) $n = 4$; б) $n = 7$; в) $n = 9$; г) $n = 11$; д) $n = 13$?

Решение: В първите четири случая играта се печели от втория играч. В а) е достатъчно той да си осигури числото, съставено от последните две цифри, да се дели на 4, а това винаги е възможно. В б) печелившата стратегия е подобна – ако шестцифреното число, което трябва да се получи, е $\overline{abcdef}$, то вторият играч лесно може да си осигури всяко от числата $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ и $\overline{ef}$ да е кратно на 7. Тогава и $\overline{abcdef}$ ще е кратно на 7. За в) е съществен само последният ход на втория играч, тъй като, ако $S = a + b + c + d + e$, то поне едно от числата $S, S + 1, \dots, S + 9$ се дели на 9. С последния си ход втория играч избира такава цифра f, че $S + f$ да се дели на 9 и получава исканото. Подобна стратегия е възможна и за предишната подточка. За г) е достатъчно да забележим, че числото $\overline{aabbcc}$ винаги се дели на 11. В последния случай печеливша стратегия има първият играч. Понеже 1001 се дели на 13, то числото $\overline{abcdef}$ е кратно на 13 точно тогава, когато $\overline{abc} - \overline{def}$ се дели на 13. Това е така, защото $\overline{abcdef} = 1000\overline{abc} + \overline{def} = 1001\overline{abc} - (\overline{abc} - \overline{def})$. Нека след втория ход на първия играч трицифреното число $\overline{abc}$ дава остатък k при деление на 13, $0 \leq k \leq 12$. Ако с втория си ход вторият играч избере за четвърта цифра d, то измежду числата $\overline{d00}, \overline{d01}, \ldots, \overline{d99}$ най-много осем дават остатък k при деление на 13. Това означава, че тези най-много осем числа ще имат най-много 8 различни цифри на десетиците си и първият играч с последния си ход трябва да избере именно онази девета цифра, която не е цифра на десетиците на никое от осемте числа. Това му гарантира, че числото $\overline{def}$ няма да дава остатък k при деление на 10 и значи $\overline{abcdef}$ няма да се дели на 13.

Задача 5. Двама играчи заместват шестте звездички $******$ с цифри в произволен ред, докато не се получи шестцифрено число. Най-лявата цифра не може да е 0. Ако полученото число се дели на 1001, играта печели вторият играч, а в противен случай – първият. Кой от двамата играчи може да спечели играта и как трябва да играе?

Задачата упражнява признаците за делимост и принципа на Дирихле (в последната си част).

Решение: Първият играч може да спечели играта, ако първият му ход е $***0**$. Доказателството се базира на простия факт, че всички шестцифрени числа, които се делят на 1001, имат вида $\overline{abcabc}$ и е ясно, че след посочения първи ход такова число не може да се получи.

Задача 6. Върху черната дъска е записан изразът $\square \cdot 1 + \square \cdot 3 + \square \cdot 5$. Двама играчи един след друг попълват по едно квадратче с произволни естествени числа, докато се получи аритметичен израз. Ако стойността на този израз е просто число, играта печели първият играч, а ако е съставно число, победата е за втория. Кой от двамата може да спечели играта и как трябва да играе?

Решение: Ако първият играч с първия си ход попълни квадратчето пред 1 с числото x, то вторият играч трябва да попълни квадратчето пред 5 с число, даващо същия остатък при деление на 3, какъвто и x. Това гарантира, че стойността на израза ще е число, кратно на 3 и по-голямо от 3. А ако с първия си ход първият играч попълни някое от квадратчетата пред 3 или 5, вторият попълва квадратчето пред 1 така, че получаващото се до момента число да е кратно на множителя след последното празно квадратче. Това отново му гарантира победата.

С тази задача се упражняват признаците за делимост на 3 и 5, както и делимостта на сбор от събираеми. Освен това се прави пропедевтика на сравненията.

Задача 7. На черната дъска първоначално са написани числата 25 и 36. Един ход в играта, която се играе от двама играчи, е в написването на разликата на две от съществуващите на дъската числа, но е забранено да се пишат вече съществуващи на дъската числа. Кой от двамата играчи ще спечели играта?

Решение: Тук изходът на играта не зависи от ходовете на играчите. Същественото е, че в един момент задължително на дъската ще се появи НОД на първоначалните две числа и всичките му кратни. Понеже началните две числа са взаимно прости, то играта ще свърши точно когато на дъската се появят всички числа от 1 до 36. Това означава, че ще бъдат направени точно 34 хода и следователно играта ще бъде спечелена от втория играч.

В тази задача по същество се упражнява алгоритъмът на Евклид, както и понятията НОД на естествени числа и взаимно прости числа.

Задача 8. На дъската са написани числата $1, 2, 3, \ldots, 27$. Двама играчи поред зачеркват по едно от тези числа, докато не останат точно две числа. Ако сумата на тези две числа е кратна на 5, печели първият играч, а в противен случай печели вторият. Кой от двамата играчи може да спечели играта и как трябва да играе?

Решение: Тук печеливша стратегия има първият играч. С първият си ход той зачертава числото 27 и след това всеки път, когато вторият играч зачертае число, което не се дели на 5, първият играч зачертава такова число, което "допълва" зачертаното от втория до кратно на 5. Ако вторият играч зачертае число, кратно на 5, точно веднъж първият играч зачертава число, даващо остатък 1 при деление на 5, а в останалите случаи зачертава кратно на 5. Лесно се проверява, че първият играч винаги може да следва посочената стратегия и че тя е печеливша за него.

Задача 9. На дъската са написани числата $1, 2, 3, \ldots, 1000$. Двама играчи поред зачертават по едно от тези числа, докато не останат точно две числа. Ако сумата на тези две числа е кратна на 3, печели първият играч, а в противен случай печели вторият. Кой от двамата играчи може да спечели играта и как трябва да играе?

Решение: Печелившата стратегия е за втория играч. Да отбележим, че в играта трябва да бъдат направени точно 998 хода, т.е. последният ход прави вторият играч. Ето как трябва да играе той. Отначало той зачертава всички числа, кратни на 3. За да направи това, му трябват не повече от 333 хода. След като от дъската изчезнат кратните на 3, вторият играч играе по произволен начин до предпоследния си ход включително. Преди последния ход на дъската ще има три числа, които не са кратни на 3. Следователно поне две от тях ще дават един и същ остатък при деление на 3 и значи сумата им няма да се дели на 3. Именно тях трябва да остави вторият играч.

С последните две задачи отново се упражнява делението с остатък, както и аритметиката на остатъците, като едновременно с това се прави пропедевтика на сравненията.

Задача 10. Двама играчи поред заменят четирите звездички $* * **$ до получаването на четирицифрено число. Редът на замяна е произволен, но на първо място не може да се пише 0. Ако полученото четирицифрено число има поне 8 делителя, играта печели вторият играч, а в противен случай печели първият. Да се построи печеливша стратегия за втория играч.

Решение: Нека с първия си ход първият играч не попълва цифрата на единиците на числото. Тогава вторият с първия си ход ще попълни тази звездичка с произволна четна цифра, а с втория си ход ще си осигури делимост на 9. Но тогава, ако n е полученото четирицифрено число, то числата $1, 2, 3, 6, 9, 18, \frac{n}{18}, \frac{n}{9}, \frac{n}{6}, \frac{n}{3}, \frac{n}{2}, n$ са различни делители на n и следователно вторият играч печели. Същата стратегия вторият играч може да следва, ако с първия си ход първият играч попълни най-дясната звездичка с 5. Остава да разгледаме случая, в който след първия ход на първия играч ситуацията е някоя от следните: $* * *1$, $* * *3$, $* * *7$ или $* * *9$. Тогава с първия си ход вторият играч трябва да отговори съответно така: $*8 * 1$, $*6 * 3$, $*2 * 7$, $*0 * 9$. След това, ако първият играч попълни някоя звездичка с цифрата x, с последния си ход вторият отговаря с цифрата $9 - x$. От признаците за делимост следва, че полученото по този начин число ще се дели на 9 и на 11 и ще има повече от 8 делителя. Посочената в този случай стратегия не може да се реализира само ако с втория си ход първият играч попълни звездичката на десетиците с 9. В такъв случай обаче вторият играч завършва играта с някое от числата 9891, 9693, 3297 или 9099, всяко от които има поне 8 делителя.

IV. Заключение. Предложената дидактическа система от задачи е примерна. В учебно-методическата литература могат да бъдат намерени достатъчно други примери, реализиращи идеите, разгледани от авторите. Тази дидактическа система от задачи-игри е използвана от авторите при работа с талантливи ученици от 5 клас, победители в състезанието "Европейско математическо Кенгуру" или в Задочния математически конкурс "Издирване на таланти Ум+". Планира се продължение на идентификационната процедура с разглеждания тук инструментариум до натрупването на достатъчно емпирични данни за основа на категорични изводи и заключения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Diezmann. Capitalising on the Zeitgeist for Mathematically Gifted Students. *Australasian Journal for Gifted Education*, **11**, No 2, (2002), 5–10.

[2] M. Nancy. Assessing and Advocating for Gifted Students: Perspectives for School and Clinical Psychologists. The National Research Center on the Gifted and Talented.

[3] J. Freeman. Out-of-school Educational Provision for the Gifted and Talented around the World. A report for the Department of Education and Skills, London, 2002

[4] S. Grozdev, S. Doichev. A Didactical System of Entertainment Problems for the Development of Skills. International Conference on Mathematical Education, 3–5 June, Svishtov, Bulgaria.

[5] Колектив. XXII Турнир имени Ломоносова, Москва, 1999, ISBN 5-900916-44-8.

[6] G. Brousseau. Theory of the Situations, 1997.

Сава Гроздев
Институт по Математика и Информатика
Българска Академия на Науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Светлозар Дойчев
бул. Княз Батенберг, 51-Е-125
6003 Стара Загора
e-mail: sv_doichev@abv.bg

MATHEMATICAL GAMES AS INSTRUMENT FOR IDENTIFICATION OF MATHEMATICAL TALENTS

Sava Grozdev SvetlozarDoichev

A didactical system of mathematical problems-games is proposed for the identification of students with outstanding capabilities in Mathematics. The games are considered as didactical situations for starting research in concrete problems' solving, formulating hypotheses and suggesting ways for solving the problems and confirmation of the solutions.