МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2009
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2009
Proceedings of the Thirty Eighth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 1–5, 2009

ЕДНА КРИВА ОТ ВТОРА СТЕПЕН ЗА ДВЕ ТОЧКИ НА ЧЕВА

Сава Гроздев, Веселин Ненков

С помощта на компютърната програма THE GEOMETER'S SKETCHPAD е показано как се открива една връзка между чевиани и криви от втора степен, свързани с даден триъгълник.

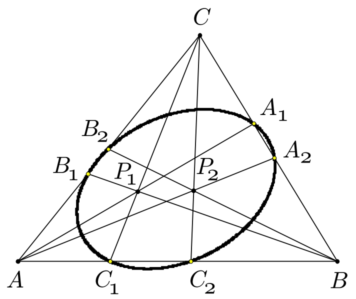
Нека ABC е произволен триъгълник. Известно е, че средите на страните и петите на височините на $\triangle ABC$ лежат на една окръжност ω, която се нарича Ойлерова окръжност за $\triangle ABC$ [1, с. 12, зад. 43]. Известно е също, че тези (в най-общия случай) шест точки се получават от пресичането на две тройки чевиани [1, с. 221, зад. 1018] с правите, определящи дадения триъгълник. Следователно можем да заключим, че ω *е определена от чевианите през медицентъра и ортоцентъра на* $\triangle ABC$.

Нека P_1 е произволна точка от равнината на $\triangle ABC$ и $A_1 = AP_1 \cap BC$, $B_1 = BP_1 \cap CA$, $C_1 = CP_1 \cap AB$. Ако описаната окръжност k за $\triangle A_1B_1C_1$ пресича повторно правите BC, CA и AB съответно в точките A_2, B_2 и C_2, то правите AA_2, BB_2 и CC_2 минават през една точка P_2 [1, с. 224, зад. 1028]. Следователно *окръжността* k *е определена от чевианите през точките* P_1 и P_2 по същия начин, както е определена ω. Нещо повече, ω се получава, когато P_1 и P_2 съвпадат с медицентъра и ортоцентъра на $\triangle ABC$, т.е. ω е частен случай на k.

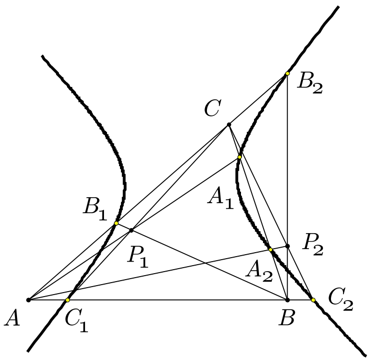
Освен окръжността k, точките A_1, B_1 и C_1 заедно със средите на страните на $\triangle ABC$ определят една крива от втора степен $\Omega(P_1)$. Кривата $\Omega(P_1)$ е обобщение на ω и притежава редица интересни свойства, някои от които се съдържат в [2], [3], [4] и [5]. Тази крива *е определена от чевианите през точката* P_1 *и медицентъра на* $\triangle ABC$, като също представя едно обобщение на първоначалното разсъждение, свързано с ω.

От направените наблюдения се вижда, че при специален избор на две точки P_1 и P_2 шестте точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 и C_2, определени от пресичането на чевианите през P_1 и P_2 със страните на даден $\triangle ABC$, лежат на една крива от втора степен. Така, по естествен начин възниква въпросът за възможността тези шест точки да лежат на една крива от втора степен, когато двете точки P_1 и P_2 са произволно избрани в равнината на $\triangle ABC$. Ще изследваме този въпрос с помощта на програмата THE GEOMETER'S SKETCHPAD.

В равнината на $\triangle ABC$ избираме произволно две точки P_1 и P_2. Построяваме пресечните точки на чевианите през тези точки с правите BC, CA и AB. След това построяваме крива от втора степен през пет от тези точки. Забелязва се, че тази крива минава и през шестата точка. За да сме сигурни, че това не е случайно, променяме положенията на върховете на $\triangle ABC$ и на точките P_1 и P_2. Във всички разгледани конкретни случаи получаваме, че шестте точки лежат на една крива от втора степен $\Omega(P_1, P_2)$ (Фиг. 1, 2).

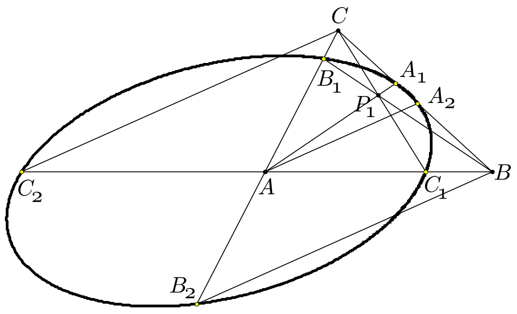


Фиг. 1

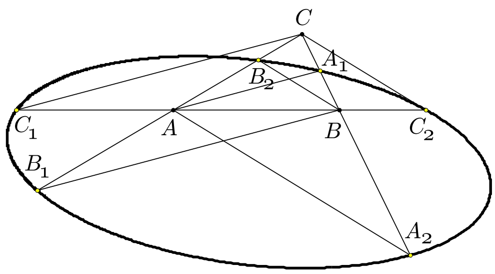


Фиг. 2

Точките A_1, B_1 и C_1 съществуват и когато правите AA_1, BB_1 и CC_1 са успоредни. В този случай ще считаме, че точката P_1 е безкрайна за равнината на $\triangle ABC$. При това положение има още два случая, които се получават, когато точно една от точките P_1 и P_2 е безкрайна (Фиг. 3) и когато и двете точки са безкрайни (Фиг. 4). В тези случаи можем да направим същите експерименти с помощта на програмата THE GEOMETER'S SKETCHPAD, както при крайни точки P_1 и P_2. Резултатът отново е една крива от втора степен $\Omega(P_1, P_2)$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Осъществените наблюдения дават основание да формулираме следната

Теорема. *Ако P_1 и P_2 са произволни (крайни или безкрайни) точки от равнината на $\triangle ABC$, никоя от които не лежи върху някоя от правите BC, CA и AB, то правите AP_1, AP_2, BP_1, BP_2, CP_1 и CP_2 пресичат правите BC, CA и AB в шест точки, които лежат на една крива от втора степен.*

За да приключим последователността от действия, започнали с анализиране на известни частни случаи, преминали към наблюдения с THE GEOMETER'S SKETCH-

PAD и достигнали до формулиране на обобщеното твърдение, остава да извършим доказателство на това твърдение, с което ще го узаконим формално математически.

Доказателство. Ще използваме барицентрични координати при координатен триъгълник ABC, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ и $P_i(\lambda_i,\mu_i,\nu_i)$ $(i=1,2)$ [6]. Ако P_i е крайна точка, то $\lambda_i+\mu_i+\nu_i=1$, а ако е безкрайна, то $\lambda_i+\mu_i+\nu_i=0$ при $i=1,2$.

И в двата случая имаме следните координатни представяния:

$$A_i\left(0,\frac{\mu_i}{\mu_i+\nu_i},\frac{\nu_i}{\mu_i+\nu_i}\right),\ B_i\left(\frac{\lambda_i}{\nu_i+\lambda_i},0,\frac{\nu_i}{\nu_i+\lambda_i}\right),\ C_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i},\frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i},0\right),\ (i=1,2).$$

Да разгледаме кривата от втора степен $\Omega(P_1,P_2)$, която има уравнение

$$\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2x^2+\nu_1\lambda_1\nu_2\lambda_2y^2+\lambda_1\mu_1\lambda_2\mu_2z^2-\lambda_1\lambda_2\left(\mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1\right)yz-$$

$$-\mu_1\mu_2\left(\nu_1\lambda_2+\nu_2\lambda_1\right)zx-\nu_1\nu_2\left(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1\right)xy=0.$$

Лесно се проверява, че координатите на точките A_i, B_i и C_i $(i=1,2)$ удовлетворяват уравнението и следователно тези точки лежат на разглежданата крива.

С това теоремата е доказана. $\square$

Анализът на твърденията, които предизвикаха търсенето на доказаната теорема, показва, че тази теорема е обобщение на две различни обобщения на известно твърдение, определящо Ойлеровата окръжност ω като специална за произволен $\triangle ABC$. Самата теорема има най-общ характер и затова не дефинира специфична за $\triangle ABC$ крива от втора степен.

REFERENCES

[1] Х. Хитов. Геометрия на триъгълника. Народна просвета, София, 1990.

[2] В. Ненков. Четири криви от втора степен, минаващи през една точка. *Математика плюс*, № 2 (2005), 61–66.

[3] V. Nenkov. Euler' s Line and Euler' s Curve Dependent by a Point. New Trends in Mathematics and Informatics, Jubilee International Conference 60 years Institute of Mathematics and Informatics Bulgarian Academy Sciences, Abstracts, Sofia, Bulgaria, 6–8 July 2007, 48.

[4] В. Ненков. Четири Ойлерови окръжности през една точка. *Математика плюс*, № 2 (2008), 60–61.

[5] В. Ненков. Обобщение на теоремата на Фойербах. *Математика и информатика*, (2008), 35–42.

[6] Г. Паскалев, И. Чобанов. Забележителни точки в триъгълника. Народна просвета, София, 1985.

Сава Гроздев
Институт по Математика и Информатика
Българска Академия на Науките
ул. акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Веселин Ненков
Технически колеж Ловеч
ул. Съйко Съев № 31
Ловеч
e-mail: vnenkov@mail.bg

A SECOND DEGREE CURVE FOR TWO CEVA' S POINTS

Sava Grozdev, Vesselin Nenkov

By the software THE GEOMETER'S SKETCHPAD it is shown in the paper how a connection is discovered between cevians and second degree curves, related to a given triangle.