МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2009
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2009
Proceedings of the Thirty Eighth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 1–5, 2009

ТЕОРЕМАТА НА ПИК В ИЗВЪНКЛАСНО ЗАНИМАНИЕ С ПЕТОКЛАСНИЦИ

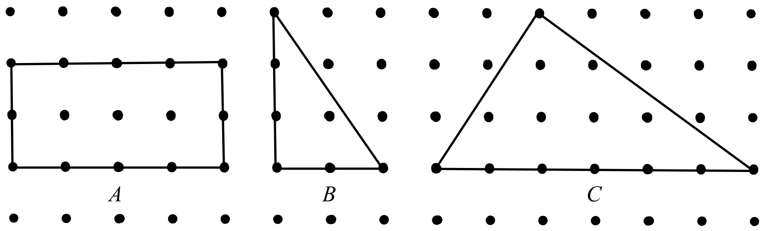
Сава Гроздев, Тони Чехларова

Предложен е модел за организиране на изследователска дейност за преоткриване на формулата на Пик в извънкласно занимание с петокласници.

През 1899 г. австрийският математик Георг Александър Пик (1859–1942) публикува един резултат, който днес е известен като теорема на Пик или формула на Пик. Резултатът се отнася за намиране лица на многоъгълници с върхове във възлите на квадратна мрежа. Той се формулира лесно и е достъпен за петокласници, след като са усвоили понятието "лице" в задължителната училищна програма. От друга страна е добре известно, че равнинните решетки (квадратни мрежи) притежават многобройни приложения не само за решаването на дискретно-геометрични задачи чрез записването им в аналитичен вид, но и обратно – за свеждането на съдържателни задачи от алгебрата, анализа и теорията на числата до чисто геометрични задачи. Като прибавим и факта, че теоремата на Пик е еквивалентна с комбинаторната формула на Ойлер за свързаните графи и в частност с Ойлеровата характеристика на триангулациите на многоъгълници, стигаме до убеждението, че учениците не бива да се лишават от възможността за докосване до съдържателна математика в извънкласните форми на обучение, особено в случаите, когато задължителната им подготовка позволява това. Съществува голям брой публикации във връзка с теоремата на Пик, включително и с методики за преподаването ѝ на по-малки ученици. Целта е да предложим подход, който се основава на организиране на изследователска дейност по преоткриването ѝ чрез съответен подбор на задачи, в т.ч. и оригинални.

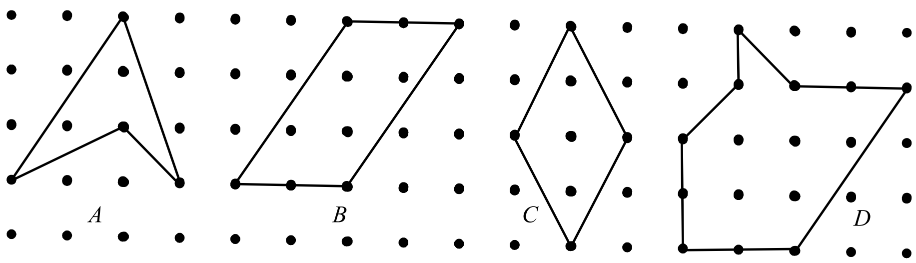
Дидактическата система започва с упражнение за намирането на лица в квадратна мрежа. Първата задача е свързана с непосредствено прилагане на формулите за лице на правоъгълник и триъгълник, съответно $S = a.b$, където a и b са размерите на правоъгълника, и $S = 0,5a.h$, където a е дължината на страна на триъгълника, а h е дължината на височината към тази страна.

Задача 1. Да се намери какво количество боя е необходима за оцветяване на вътрешността на трите фигури A, B и C от чертежа, ако дължината на страната на единичното квадратче от мрежата е 1 м и за 1 кв. м са необходими 250 г боя.



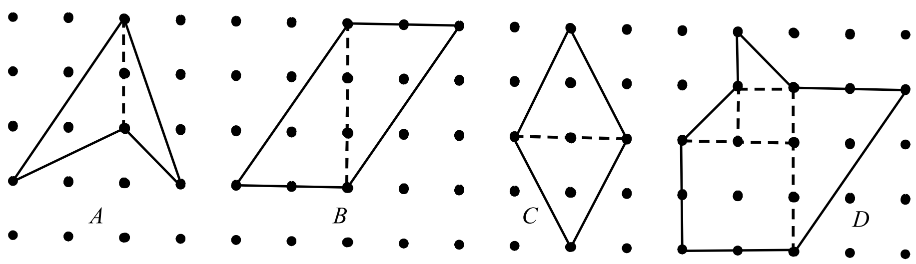
Решение: Лицата на A, B и C са съответно: $4.2 = 8$ кв. м, $\dfrac{2.3}{2} = 3$ кв. м и $\dfrac{6.3}{2} = 9$ кв. м, а сборът им е $8 + 3 + 9 = 20$ кв. м. Тогава за необходимото количество боя намираме $20.250 = 5000$ г $= 5$ кг.

Когато непосредственото прилагане на горните формули не е възможно, то естественият подход е фигурата, чието лице търсим, да се раздели на правоъгълници (в частност квадрати) и триъгълници.



Задача 2. Показаните на чертежа четири фигури A, B, C и D представляват градински участъци, които трябва да се покрият с тревни чимове. Да се подредят участъците във възходящ ред според необходимото количество чимове за затревяването им.

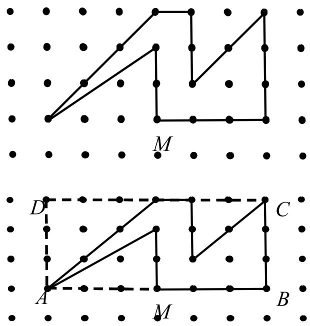
Решение:



Фигурата A може да се раздели на два триъгълника (вж. чертежа), които имат лица съответно $\dfrac{2.2}{2} = 2$ и $\dfrac{2.1}{2} = 1$. Следователно лицето на A е 3. Аналогично лицата на B и C са 6 и 4. Фигурата D може да се раздели например на два квадрата и три триъгълника (вж. чертежа) и лицето ѝ е $4 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + 3 = 9$. Подреждането във възходящ ред е A, C, B, D.

В конкретни ситуации пресмятането на лицето на дадена фигура може да се намери по-бързо не чрез разделяне, а чрез “опаковане”. Такъв пример е разгледан в следващата

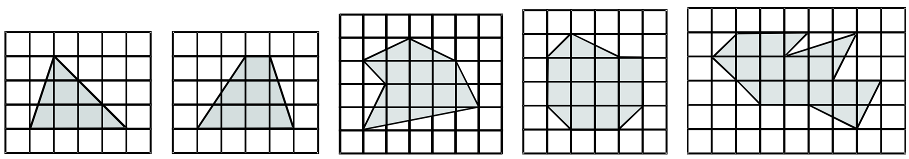
Задача 3. Да се намери лицето на фигурата M от чертежа, ако дължината на страната на единичното квадратче от мрежата е 1 см.



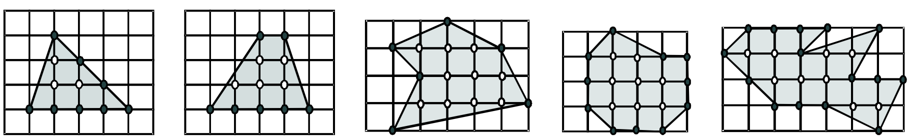
Решение: “Опаковането” на фигурата M става с помощта на правоъгълника $ABCD$. От лицето му 18 кв. см изваждаме лицата на трите триъгълника, които допълват M до $ABCD$. Оттук лицето на M е равно на $18-\dfrac{3.3}{2}-\dfrac{3.2}{2}-\dfrac{2.2}{2}=18-\dfrac{9}{2}-3-2=13-\dfrac{9}{2}=8\dfrac{1}{2}$ кв. см.

Съществуват и други подходи за намиране на лица, например чрез събиране на части до получаване на триъгълник или правоъгълник, върху които няма да се спираме. Насочваме се към теоремата на Пик, която има вида $S=m+\dfrac{n}{2}-1$. Формулата позволява намирането на лицето S на многоъгълник с върхове във възлите на квадратна мрежа, където m е броят на възлите във вътрешността на многоъгълника, а n е броят на възлите по неговия контур, включително и върховете на многоъгълника. Получената стойност трябва да се умножи с лицето на единичното квадратче от мрежата, което тук приемаме за 1. Доказателството на теоремата на Пик изисква познания от гимназиалния курс по математика (например триангулация или тригонометрия). Подходът, който предлагаме за петокласници, се основава на експеримента, т.е. чрез поредица от конкретни примери учениците да стигнат до твърдението в теоремата или с други думи, да я преоткрият.

Задача 4. Да се установят стойностите на m, n и S за всяка от фигурите и да се попълни съответна таблица.



Решение: Възлите от вътрешността на многоъгълниците са означени с бели точки, а тези от контурите – с черни.



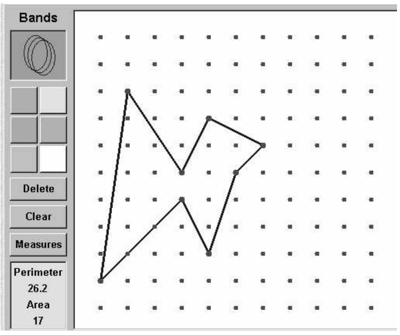
A B C D E

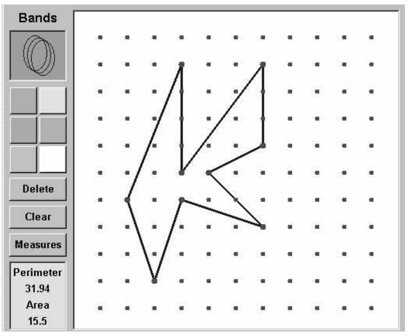
За намиране на лицата използваме някоя от споменатите по-горе стратегии. Така стигаме до таблицата:

	A	B	C	D	E
m	3	5	10	8	9
n	8	7	6	11	15
$m+\dfrac{n}{2}-1$	6	7,5	12	12,5	15,5
S	6	7,5	12	12,5	15,5

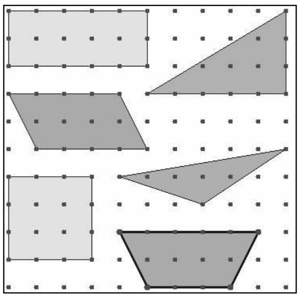
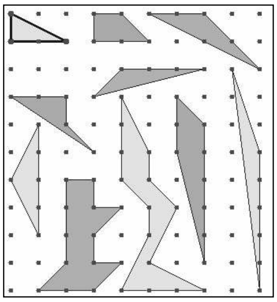
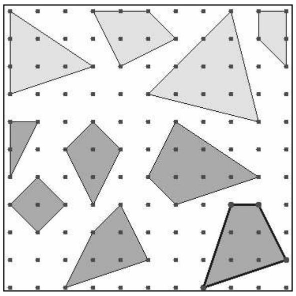
С помощта на таблицата от задача 4, т.е. експериментално, се стига до хипотезата, че $S = m + \dfrac{n}{2} - 1$ за разглеждания клас задачи. Тук е подходящо петокласниците да научат, че изведената от тях зависимост е известната формула на Пик.

Откриването на функционалната зависимост на основата на малък брой изследвани многоъгълници е трудно. Учениците трябва да забележат, че в някои случаи се получават десетични дроби, на които дробната част е една и съща. Освен това трябва да стигнат до извода, че не се получава цяла стойност на S в случаите, в които n е нечетно число. В резултат на това те трябва да формулират предположение, че в търсената зависимост n се разделя на 2 и т.н. Оказва се, че използването на софтуер подпомага значително организирането на преоткриване на формулата на Пик без предпоследния ред на таблицата. Удобна е например програмата *Geoboard*, достъп до която има на адрес `http://www.nlvm.usu.edu/` [2]. В тази среда учениците могат да построяват в квадратна мрежа многоъгълници с върхове – възли на мрежата. В случаите, когато няма самопресичане на страни, програмата посочва лицето на построения многоъгълник. При това лесно се забелязва, че стойността на лицето е цяло число или десетична дроб, дробната част на която е 0,5. Попълването на таблицата може да стане за многоъгълници, построени със софтуера. Това позволява използването на автоматично изчисленото лице вместо да се отделя време за пресмятането му. За кратко време се натрупват числови данни, които подпомагат разкриване на функционалната зависимост. Именно голямото количество числови данни убеждава учениците в наличието на функционална зависимост. Бързо се забелязва, че ако за два многоъгълника стойностите на съответните m и n са равни, то многоъголниците имат и равни лица.





В проведения експеримент за достигане до формулата на Пик учениците се насочиха (самостоятелно или с помощ) към фигури като $A1 - A6$, които имат равен брой точки във вътрешността (включително и такива като $B1 - B10$, които нямат точки във вътрешността). Следващата група фигури бяха многоъгълници с равен брой точки върху страните (виж фигури $C1 - C4$ и $D1 - D6$).

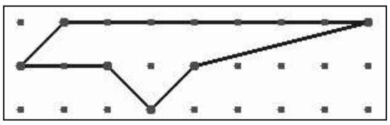
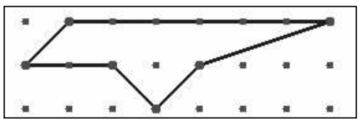
$A1 - A6$ $B1 - B10$ $C1 - C4$ и $D1 - D6$

	$A1$	$A2$	$A3$	$A4$	$A5$	$A6$	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$	$B5$	$B6$	$B7$	$B8$	$B9$	$B10$
m	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
n	14	10	9	12	3	10	4	5	6	5	5	6	13	14	9	7
S	10	8	7,5	9	4,5	8	1	1,5	2	1,5	1,5	2	5,5	6	3,5	2,5

	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	$D1$	$D2$	$D3$	$D4$	$D5$	$D6$
m	3	2	6	0	0	1	2	3	4	5
n	**5**	**5**	**5**	**5**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
S	4,5	3,5	7,5	1,5	1	2	3	4	5	6

Последната група фигури $D1$–$D6$ бе подбрана съвсем целенасочено – с четири контурни възела и съответно с 0; 1; 2; 3; 4; 5 вътрешни възела.

Една от ученичките използваше построена фигура и с преместване на един от върховете получаваше последователно фигури със същия брой вътрешни точки, но с една контурна точка по-малко в сравнение с предходната фигура. Тя постъпи по същия начин и по отношение на фигурите с равен брой контурни точки и различен брой вътрешни точки.

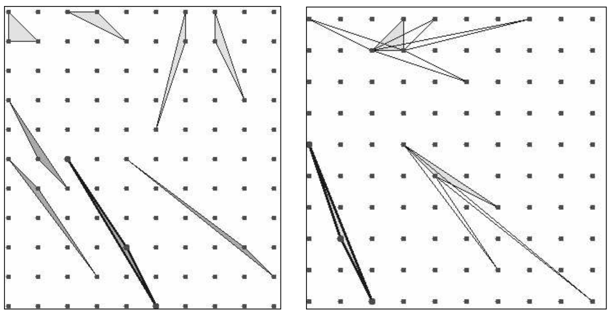



Попълвайки таблицата със "своите" данни, ученичката устно предсказа следващите няколко стойности на S.

	$K1$	$K2$	$K3$	$K4$	$K5$	$K6$	$K7$	$K8$		
m	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
n	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**12**	**11**	**10**	**9**	**8**
S	3,5	4	4,5	5	6,5	6	5,5	4	3,5	6

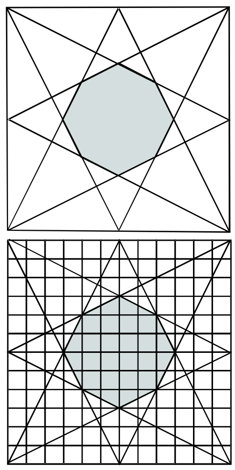
Описаният подход подпомага както запомнянето на формулата, така и "възстановяването" ѝ при забравяне – чрез разсъждения или конкретни примери. При "възстановяването" на формулата впечатление направи използването на буквите v за броя на вътрешните и k броя на контурните точки, вместо m и n.

Задача 5. В квадратна мрежа с дължина на страната на единичното квадратче 1 см постройте триъгълници с лице $0,5$ кв. см.



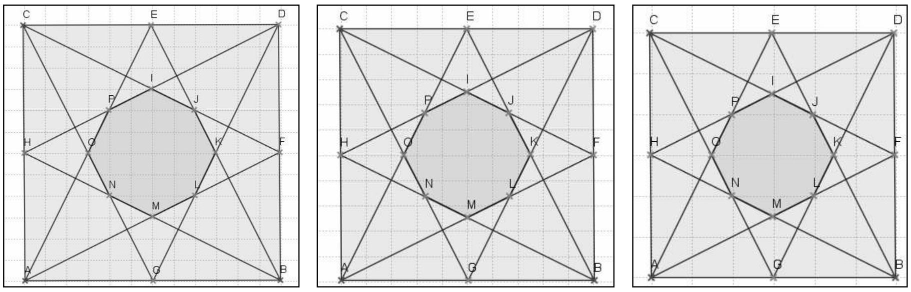
От формулата на Пик следва, че търсените триъгълници нямат вътрешни възли и единствените възли върху страните им са във върховете на триъгълника. Интерес представляват изводите, свързани с описание на множеството от точки, които могат да бъдат трети връх на триъгълниците с лице 0,5 (при фиксирани два върха).

Задача 6. Средите на страните на квадрат са съединени с върховете, както е показано на фигурата. Да се намери отношението на лицето на квадрата и лицето на осмоъгълника, образуван от построените отсечки [1].



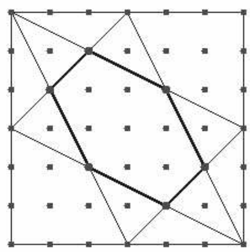
Съществeният факт тук е, че върховете на осмоъгълника са разположени във възли на квадратната мрежа. Осмоъгълникът е с равни страни, но ъглите му не са равни, т.е. той не е правилен. С формулата на Пик изчисляваме лицето му $21 + \frac{8}{2} - 1 = 24$. Търсеното отношение на лицата е 6. Трудността при решаване на тази задача е в избора на квадратна мрежа като допълнително построение.

Авторите организираха и експерименти за самостоятелно съставяне на задачи, аналогични на задача 6. Да отбележим, че експериментална работа може да се осъществи и с други продукти, например с *Geonext*. Поради възрастта на учениците обаче, в този случай учителят би трябвало предварително да е подготвил конструкции в средата *Geonext*. В осъществения от авторите експеримент учениците използваха плаващи точки, което осигурява динамичност на съответните конструкции. С използване на конструкцията за задача 6 лесно се проверява дали е възможно да се използват квадрати 10×10, 8×8 или 6×6. Междинни резултати (например факта, че някои от пресечните точки са възли на мрежата) водят до нови конфигурации, при които е възможно и рационално прилагане на формулата на Пик.



Така от факта, че точките N и J на последния чертеж горе са във възли на мрежата, се стига до

Задача 7. Точките E, F,G и H са среди съответно на страните AB,BC, CD и DA на квадрата $ABCD$. Да се намери отношението на лицето на квадрата и лицето на общата част на триъгълниците BGH и EFD.



Формулата на Пик за намиране на лица не е от знанията по математика, които се помнят трайно. Достатъчно е учениците да знаят за съществуването ѝ. Точния ѝ вид те биха могли да откриват в справочници (включително и в Интернет) или да го възстановят чрез използване на конкретни фигури. Съществено за така организираното занятие е осигуряване на възможност за усвояване на елементи от изследователския процес, а така също за осъзнаване на ситуации, в които е подходящо използването на самата формула.

REFERENCES

[1] В. Вавилов, А. Устинов. Многоугольники на решетках. МЦМНО, Москва, 2006, 70 с.
[2] `http://www.nlvm.usu.edu/`

Сава Гроздев
Тони Чехларова
Институт по Математика и Информатика
Българска Академия на Науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: sava.grozdev@gmail.com
e-mail: tchehlarova@mail.bg

THE PICK'S THEOREM
IN OUT-CLASS TRAINING OF FIFTH GRADE STUDENTS

Sava Grozdev, Toni Chehlarova

A model is proposed for the organization of research activity in rediscovering of the Pick's theorem during an out-class training of fifth grade students.