МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2009
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2009
Proceedings of the Thirty Eighth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 1–5, 2009

ВЪРХУ ИЗУЧАВАНЕТО НА ЕДИН КЛАС ФУНКЦИИ ПРИ СТУДЕНТИ ПЪРВОКУРСНИЦИ*

Лиляна Каракашева-Йончева

В доклада се предлага набор от задачи по темата “Определен интеграл”, свързани с изследването на функции, дефинирани с помощта на интеграл и разглеждани със студентите първокурсници. Подобен набор от задачи стимулира студентите да работят по-резултатно при самоподготовката си.

1. Въведение. Известно е, че основни дидактически съставки на учебно-научния процес във висшето училище са семинарните упражнения и самостоятелната работа. Самоподготовката е все още подценена в учебната практика. Тя е по-успешна, ако е предшествана от ефективни семинарни упражнения. А ефективността на семинарните занятия съществено зависи от подбора, подредбата и начина на решаване на поставените задачи.

В доклада се предлага набор от задачи по темата “Определен интеграл”, разглеждан при студентите първокурсници. Изследването на функции, дефинирани с помощта на интеграл, обикновено затруднява студентите. Ако обаче задачите са дозирани по трудност и обем, това би стимулирало повече студенти да работят успешно, както по време на семинарното упражнение, така и в извънаудиторната самостоятелна работа.

В предложените задачи често се използва теоремата на Нютон-Лайбниц. Затова ще припомним тази основна теорема на интегралното смятане.

Теорема. *Нека функцията* $f:\Delta\to\Re$ *е дефинирана в интервала* Δ *и интегрируема в Риманов смисъл във всеки ограничен и затворен подинтервал на* Δ *и нека* $a\in\Delta$. *Тогава функцията* $F:\Delta\to\Re$, *дефинирана с равенството* $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$, *е диференцируема във всяка точка* $x_0\in\Delta$, *в която* f *е непрекъсната и е в сила равенството* $F'(x_0)=f(x_0)$.

2. Изложение.

Задача 1. *Нека функцията* F *е дефинирана в интервала* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *с равенството*

$$F(x)=\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{1-t^2}dt.$$

*Изследването е частично финансирано от проект РД-05-476/07.05.2008.

а) *Покажете, че функцията F е диференцируема в интервала* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *и намерете* $F'(x)$*;*

б) *Покажете, че* $F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$ *за всяко* $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$*;*

в) *Пресметнете* $I=\int\limits_0^1\sqrt{1-t^2}dt$.

Решение. а) Да разгледаме функцията $f:[-1,1]\to\Re$, за която $f(t)=\sqrt{1-t^2}$. Тази функция е непрекъсната в интервала $[-1,1]$, следователно функцията $F(u)=\int\limits_0^u f(t)dt$ е диференцируема и $F'(u)=f(u)$ за всяко $u\in[-1,1]$.

Известно е, че функцията $\varphi:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\Re$, $\varphi(x)=\sin x$ е диференцируема. Тогава, $F(x)=F(\varphi(x))$ и по правилото за диференциране на сложна функция получаваме, че

$$F'(x)=F'(\varphi(x))\varphi'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}.\cos x=|\cos x|\cos x=\cos^2 x,$$

понеже $\cos x\geq 0$ за $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Така получихме, че $F'(x)=\cos^2 x$ за всяко $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

б) Тогава, $F(x)=\int\cos^2 xdx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$, където C е константа.

Но $F(0)=0$ и, следователно, $C=0$. Така намерихме, че $F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$ за всяко $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

в) Като приложение, използвайки полученото представяне за F от подточка б), да пресметнем $I=\int\limits_0^1\sqrt{1-t^2}dt$.

Забелязваме, че $I=F\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Но $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$ и следователно $I=\frac{\pi}{4}$.

За самостоятелна работа може да се предложи следната

Задача 2. *Нека функцията F е дефинирана с равенството*

$$F(x)=\int\limits_0^{\sin x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

а) *Покажете, че функцията F е диференцируема в интервала* $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ *и пресметнете* $F'(x)$*;*

б) *Покажете, че* $F(x)=x$ *за всяко* $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$*;*

в) *Пресметнете* $I=\int\limits_0^{1/2}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Задача 3. *Нека функцията F е дефинирана с равенството*

$$F(x) = \int\limits_0^x \sqrt{1+t^2}dt, \quad x \in \Re.$$

а) *Покажете, че F е растяща функция;*
б) *Покажете, че F е нечетна функция;*
в) *Покажете, че $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.*
г) *Покажете, че $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x} = +\infty$.*

Решение. а) Функцията $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ е дефинирана и непрекъсната в $\Re$. Тогава функцията F е диференцируема в $\Re$ и $F'(x) = f(x)$ за всяко x. Тъй като $f(x) = \sqrt{1+x^2} > 0$ за всяко $x \in \Re$, F е строго растяща функция.

б) Да разгледаме функцията G, дефинирана в $\Re$ чрез равенството $G(x) = F(-x)$.

Тогава $G'(x) = -F'(-x) = -\sqrt{1+x^2} = -F'(x)$, откъдето $G(x) = -F(x) + C$, където C е константа.

Но $G(0) = F(0) = 0$, следователно $C = 0$.

Оттук получаваме, че за всяко $x \in \Re$ имаме $G(x) = -F(x)$, т.е. $F(-x) = -F(x)$, което показва, че функцията F е нечетна.

в) За всяко $t \geq 0$ имаме $\sqrt{1+t^2} \geq 1$ и $\int\limits_0^x \sqrt{1+t^2}dt \geq \int\limits_0^x dt$ за $x \geq 0$.

Тогава $F(x) \geq x$. И понеже $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

г) За всяко $t \geq 0$ имаме $\sqrt{1+t^2} \geq t$ и $\int\limits_0^x \sqrt{1+t^2}dt \geq \int\limits_0^x tdt$ за $x \geq 0$.

Следователно $F(x) \geq \dfrac{x^2}{2}$ и за $x > 0$ имаме $\dfrac{F(x)}{x} \geq \dfrac{x}{2}$, откъдето следва, че

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty.$$

Задача 4. *Нека функцията Y е дефинирана с равенството*

$$Y(x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}},$$

където k е реално число и $0 < k < 1$. Дефинираме $Y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = M$.
а) *Покажете, че функцията Y е нечетна;*
б) *Покажете, че функцията Y е диференцируема и намерете Y';*
в) *Да разгледаме функцията Z, дефинирана за всяко $x \in \Re$ чрез равенството $Z(x) = Y(x+\pi) - Y(x)$. Покажете, че за всяко $x \in \Re$ е в сила $Z(x) = 2M$.*
г) *Покажете, че функцията Y притежава обратна функция.*

Решение. а) Понеже k е реално число такова, че $0 < k < 1$, то $k^2\sin^2 t < 1$ и $1 - k^2\sin^2 t \neq 0$.

Функцията $f : t \to \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$ е дефинирана и непрекъсната за всяко $t \in \Re$. Следователно $Y(x)$ съществува за всяко $x \in \Re$.

Да разгледаме $Y(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$ и да направим смяна на променливата чрез полагането $t = -u$.

Така получаваме $Y(-x) = -\displaystyle\int_0^{x} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = -Y(x)$.

Следователно функцията Y е нечетна.

б) Понеже функцията $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$ е непрекъсната за всяко $t \in \Re$, функцията Y е диференцируема и $Y'(x) = f(x)$, т.е. $Y'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$.

в) Понеже $Y'(x+\pi) = Y'(x)$, за функцията Z получаваме, че

$$Z'(x) = 0 \quad \text{за всяко} \quad x \in \Re.$$

Следователно функцията Z е константа; остава да пресметнем $Z(0) = Y(\pi) - Y(0)$.

$$Y(\pi) = \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} = I_1 + I_2.$$

Във втория интеграл I_2 да направим смяна на променливата, като положим $t = \pi - u$.

Тогава $I_2 = -\displaystyle\int_{\pi/2}^{0} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = I_1$.

Следователно $Y(\pi) = 2I_1 = 2Y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2M$ и за всяко $x \in \Re$ е в сила $Z(x) = 2M$.

г) Понеже $Y'(x) > 0$ за всяко $x \in \Re$, функцията Y е строго растяща функция. Тогава за функцията Y, знаейки че е непрекъсната и строго растяща, можем да заключим, че притежава обратна функция, която също е непрекъсната и строго растяща в $\Re$.

От дидактически съображения е целесъобразно разглеждането на тази тема да започне с примерен набор от задачи, посочен в [2]. Друг вариант от задачи върху разглежданата тема може да се намери в [3] и [1].

Известно е, че определеният интеграл играе важна роля при решаването на редица практически задачи. При разглеждане на приложението му в геометрията за пресмятане на дължината на равнинна дъга често се стига до функциите, означавани с $F(k,\varphi)$ и $E(k,\varphi)$. Те се дефинират с

$$F(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \quad E(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta,$$

където k е реално число, $0 < k < 1$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ и се наричат непълни елиптични интеграли, съответно от първи и втори род в нормална форма на Льожандр, а k се нарича модул на елиптичния интеграл.

Френският математик Адриан М. Льожандр (1752–1833), както и други математици, са изучавали свойствата на тези функции. Съставени са подробни таблици за стойностите им при различни стойности на k и на φ и са построени техните графики. Благодарение на това тези функции могат да се изследват, въпреки че са зададени чрез интеграл, и се използват успешно в анализа и в много приложения на анализа в механиката и физиката.

3. Заключение. Системното възлагане на достъпни задачи за решаване от студентите способства за по-резултатната им самоподготовка.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Каракашева. Система от задачи за активиране самостоятелната работа на студентите. Наука, техника, технологии и образование, том I, 2004, 172–176.

[2] Л. Каракашева. Относно изучаването на темата "Определен интеграл" при студентите първокурсници. Научна конференция – Русенски университет "А. Кънчев", СУ'08 (под печат).

[3] Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II. М., Изд. Наука, 1969.

Лиляна Каракашева-Йончева
Катедра Математически анализ
Факултет по Математика и Информатика
ШУ Еп. Константин Преславски
ул. Университетска 115
9700 Шумен
e-mail: lkarakasheva@mail.bg

ON THE STUDY OF ONE CLASS OF FUNCTIONS BY FIRST-YEAR UNIVERSITY STUDENTS

Lilyana Karakasheva-Yoncheva

The article proposes a set of problems for first-year university students under the topic "Definite integral", related to the study of functions defined by means of integrals. Similar variants of problems help students work more effectively in their self-training.