

*МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2009  
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2009  
Proceedings of the Thirty Eighth Spring Conference of  
the Union of Bulgarian Mathematicians  
Borovetz, April 1–5, 2009*

**ПРИЛОЖЕНИЕ НА МЕТОДИТЕ ЗА РАЗПОЗНАВАНЕ НА  
ОБРАЗИ В ОБУЧЕНИЕТО ПО ДИСКРЕТНА  
МАТЕМАТИКА**

**Маргарита Тодорова**

В статията се изследва взаимната връзка между дисциплината “Разпознаване на образи” и дисциплината “Дискретна математика”, преподавани на студентите от специалност “Информатика” на ЮЗУ “Н.Рилски”.

Работата е опит да се отговори на въпросите, които възникват при обучението на студентите от специалност “Информатика” – как и в какъв обем да се разглеждат съответните математични и информатични дисциплини, какъв подход да се следва при излагането на учебния материал, така, че да се отговори на съвременните образователни тенденции и потребностите на развиващите се технологии.

**1. Увод.** В условията на информационно общество с лавинообразното нарастване на обема на знания се повишава интензивността на обновяването на знания, необходими за различни сфери на човешка дейност. Възниква необходимост от развиване и усъвършенстване на механизмите за пренос на знания, даващи възможност за обучение през целия живот на голям брой хора в съответствие с потребностите на личността и обществото. Новите информационни технологии дадоха нови възможности за развитието на нови, нетрадиционни методи за обучение и доведоха до съществени изменения в сферата на образованието:

- изменя се характер на развитие, придобиване и разпространение на знания;
- създават се нови възможности за обновяване съдържанието на обучението и методите на преподаване;
- разширява се достъпа до висше образование;
- измени се ролята на преподавателя в учебния процес.

Развитието на технологиите постави и нови изисквания по отношение на методиката на обучението – мотивация на съдържанието, намаляване на догматичността на изложението, по-добро развитие на евристичните способности на обучаваните, мотивирани последователни дейности от страна на преподавателя [1].

**Цел на настоящата работа е да предложи практически задачи от областта “Разпознаване на образи”, приложими при изучаването на теми от Дискретната математика. Конкретната реализация е свързана със задачи от курса по “Дискретна математика” [2, 4, 7]. Целта е разработване на технология за класификация и решаване на задачи от модул “Формални езици и граматика”, базирана на методологията на разпознаването на образи.**

**2. Разпознаването като подход – понятия, задачи.** В средата на миналия век се определи обликът на ново научно направление – разпознаване на образи (pattern recognition). Понятието “образ” (pattern) е многозначно. Освен в смисъла на **образ**, той може да бъде преведен като модел, начин, стил, режим, закономерност, начин на действие. При съвременното приложение се налага по-широкия смисъл, като се има предвид структурирано описание на разглеждания обект, представляващо принципно свойство на образа.

Понятието **образ** допуска и рекурсивно определение – *всеки символ е образ, списък от символи е образ и образи са само тези изрази, които са построени в съответствие с първите две условия*. Оформянето във вид на списък позволява да се ползва едно и също представяне за описание на образ, независимо от типа на неговото съдържание. Допълнително достойнство на *типа запис* е възможността да се използват едни и същи алгоритми за работа, независимо от съдържанието на образа. Естествено е да се допусне, че образът се състои от две групи символи: описание на променливите и описание на постоянните характеристики на обекта [3]

Основната цел на въвеждането на понятието е използването му в процеса на установяване на съответствия, т.е. при доказването на идентичността, аналогията, подобие и сходството на обектите по пътя на сравнението (съпоставянето). В различните задачи понятието образ има различен смисъл. В класическите схеми по разпознаването това е признак, в структурните модели – език, породен от граматика, характеризираща класа, към който разглежданият образ принадлежи и т.н. Терминът разпознаване се свързва с процеса на възприятие и познание, присъщи на човека и живия организъм като цяло. **Основната задача на разпознаването на образи** се състои в построяването на ефективни процедури на базата на систематични, теоретични и експериментални изследвания за класифициране на формализирани описания и обекти в съответстващите им класове [5].

Разпознаването на образи се **свързва с две функции**:

- включване на обект (образ), който е неизвестен на класификатора в клас от обекти (образи);
- идентификация на обекта (образа) като елемент, вече известен на класификатора.

Първата функция е **процес на отделяне** (формиране) на нови класове, а втората – **разпознаване**. Установяването на съответствието е задача на разпознаването.

Основните задачи, които се решават при процедурите за разпознаване и приложението на методите при изучаване на формалните езици и граматиката са:

*Определяне на признаците* (параметрите), които характеризират изучавания обект. Изборът на признаците е евристична процедура, която може да се осъществи като се отчитат общите свойства на обектите. На базата на тези примитиви (структурни признаци, които не могат да се раздробят на по-елементарни структури) се построява обект, респективно изгражда се формален език съставен от думи, които от своя страна се състоят от букви (примитиви). Оперирайки с ограничен брой букви (азбука) може да се получи описание на разнообразни обекти, т.е. за описанието на различни обекти може да се използва една и съща азбука. В резултат два еднакви неизпроизводни елемента могат да се групират един с друг по различни правила, което довежда и до различие в обектите (думите). *Като цяло описанието на произ-*

волен обект с помощта на примитиви се извършва чрез редици от непроизводни елементи, характерни само за обекта.

*Определяне на първоначална класификация на обектите*, подлежащи на разпознаване, т.е. съставяне на априорния списък на класове от обекти. Много често от методите за решаването ѝ преобладават евристичните, като изборът на признаците се свежда до определяне на това, какви решения и от кого се приемат в резултат на процеса на разпознаване, формулиране на изискванията към процедурата за разпознаване въз основа на уточнената цел, съставяне на предварителен списък на класовете (множеството от класове).

*Изграждане на азбуката на признаците*. Ефективността на избраните признаци може да се оцени след провеждането на експерименти с разработената процедура за разпознаване. На база на създадения модел на процедурата може да се избере азбуката на признаците, обезпечаваща исканото качество на решение.

*Описание на априорната азбука в термините на признаците*. Това е най-трудоемката и творческа задача. При решаването ѝ обикновено се построява изображение на всеки клас върху пространството от структурните признаци.

*Избор на алгоритъм за класификация*. Непосредственото решение на задачата се състои в разбиване на пространството от стойности на признаците на отделни области, съответстващи на класовете (определяне на граматиките, пораждащи езиците описващи съответните класове). Разбиването трябва да осигурява минимален брой грешки по отношение на попадането на обектите в “чужди” класове.

*Определяне на работните множества класове и азбука на признаците*, т.е. на такъв **работен списък** от класове и азбука на признаците, които да обезпечат максималната ефективност на разпознаването.

**3. Конкретна реализация.** Върху задачи от раздел “Формални езици” [2, 4, 7] ще построим информационно–логическа система, свързана с изучаваните “обекти–като предмет на обучение” и основните етапи, през които преминава изграждането ѝ:

1. Подробно и внимателно изучаване на обектите, подлежащи на класификация. Целта е да се изяснят особеностите на изучаваните обекти и отличителните им белези.
2. Провеждане на класификация. Състои се в избора на принципа за класификация, който се определя от изискванията към системата и зависи от решенията които се приемат.
3. Съставяне на речник на признаците, използван от априорно описание на неизвестните обекти или явления.
4. Задача за описание на класовете на езика на признаците. Тя няма еднозначно решение и в зависимост от обема на изходната, априорна информация за решаването ѝ могат да бъдат използвани различни методи.
5. Разработване на алгоритъм за разпознаване, обезпечаващ включването на обекта към един или друг клас.

Като използваме концепцията, представена по-горе изтъкваме връзката между лингвистичните методи за разпознаване на образи и специалните граматики, и пораждащите езици, с чиято помощ могат да се опишат свойствата на класове от образи. Определят се непроизводните (атомарните) елементи (признаци) за различните класове и възможните отношения между тях. Правилата на граматиката определят

построяването на образа (обекта) с помощта на терминалната азбука (атомарните елементи). Така всеки обект се представя като последователност от непроеизводни елементи – думи, които от своя страна представят езика, описващ даден клас.

С помощта на граматически разбор на дадена “дума” се установява неговата синтактическа “правилност”, т.е. може ли дадена фиксирана граматика (описваща съответен клас) да породи описанието на разглеждания обект. Граматическият разбор се провежда с помощта на дърво на извод и ако обекта е синтактически правилен той принадлежи на класа, описван от граматиката. В противен случай обекта или се отхвърля или се подлага на анализ с помощта на други граматики, описващи други класове от обекти.

Като примери на практическо приложение по-горе казаното могат да се посочат:

**Пример 1.** Задачата за разпознаване в случай на два класа –  $C_1$  и  $C_2$ , чиито представители са описани с помощта на азбуката от терминални символи  $V$ . По този начин всеки образ може да се разглежда като дума съставена от терминални символи. Да конструираме граматика  $G$ , пораждаща езика  $L(G)$  съставен от думи, описващи само образите от класа  $C_1$ . Така в класа  $C_1$  се включват само образи, чиито описания са думи от езика  $L(G)$ , а тези които не принадлежат на  $L(G)$  описват образи от класа  $C_2$ .

Да конструираме следната граматика [7]:

$$G = \{V, W, S, P\}, V = \{a, b\}, W = \{S\}, P = \{S \rightarrow aSb/b\}.$$

Езикът породен от така построената граматика е  $L(G) = \{b; a^n b^{n+1}, n \geq 1\}$ . В случай на разделяне на два класа, такива че в  $C_1$ , включва само образи с описание думи от езика  $L(G) = \{b; a^n b^{n+1}, n \geq 1\}$  и  $C_2$  – образи, описани от езика  $\{a^n b^n, n \geq 1\}$ .

Можем да класифицираме новопостъпващ образ  $x$  с помощта на правилото:

$$x \in C_1, \text{ ако } x \in L(G) \text{ в противен случай } x \in C_2.$$

В общия случай на  $m$  класа  $C_i, i = 1, \dots, m$  описани с помощта на езиците  $L_i, i = 1, \dots, m$ , породени от граматиките  $G_i, i = 1, \dots, m$ , постъпващият образ  $x$  се подлага на синтактичен разбор и се включва в класа  $C_1$ , ако  $x$  е дума от езика  $L_1$ . Образът  $x$  може да бъде зачислен в няколко класа, ако езиците не са непресичащи се, но може да бъде и отхвърлен, ако не принадлежи на нито един от класовете  $L_i, i = 1, \dots, m$  и се посочва като пример за “шум”.

**Пример 2:** Да разгледаме задачата за отделяне на правоъгълниците от всички други четириъгълници. Избираме следните примитиви (азбука):

- $a$ :  $0^\circ$  хоризонтална страна;
- $b$ :  $90^\circ$  вертикална страна;
- $c$ :  $180^\circ$  хоризонтална страна;
- $d$ :  $270^\circ$  вертикална страна.

Всички правоъгълници могат да се опишат от думата  $abcd$ , ако решим да различаваме правоъгълниците и по размер тогава е удобно да се опишат с помощта на езика  $L = \{a_0^n b_0^m c_0^n d_0^m; n, m = 1, 2, 3, \dots\}$ , където:

- $a_0$ :  $0^\circ$  хоризонтална страна с дължина 1;
- $b_0$ :  $90^\circ$  вертикална страна с дължина 1;
- $c_0$ :  $180^\circ$  хоризонтална страна с дължина 1;
- $d_0$ :  $270^\circ$  вертикална страна с дължина 1.

**Пример 3:** Да разгледаме езика  $L = \{a^n b^n c^n; 1 \leq n \leq 3\}$ , с чиято помощ, например, можем да представим всички равностранни триъгълници с една хоризонтална страна и дължини на страните 1, 2, 3, при условие, че  $a$ ,  $b$ ,  $c$  са терминалните символи, описващи страните на триъгълника:

$a$ :  $0^\circ$  хоризонтална страна с дължина на страна единица;

$b$ :  $120^\circ$  прилежаща единична страна;

$c$ :  $240^\circ$  прилежаща единична страна.

Езикът  $L = \{a^n b^n c^n; 1 \leq n \leq 3\}$  може да се породи и с помощта на автоматната граматика  $G = \{V, W, S, P\}$ ,  $V = \{a, b, c\}$ ,  $W = \{S, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K\}$  и правила на граматиката:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aA/aC, A \rightarrow aB/aD, B \rightarrow aE, C \rightarrow bI, D \rightarrow bF, F \rightarrow bJ, \\ E \rightarrow bG, G \rightarrow bH, H \rightarrow bK, I \rightarrow c, J \rightarrow cI, K \rightarrow cJ \end{array} \right\}.$$

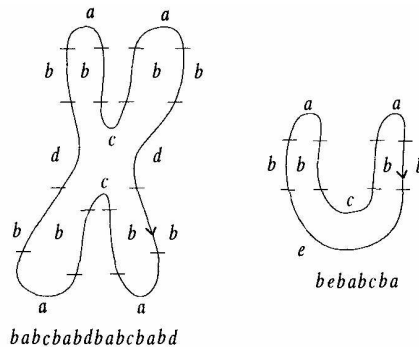
Равностранен триъгълник с дължина на страната 2, например, може да се опише с помощта на следния извод:  $S \mid - aA \mid - aaD \mid - aabF \mid - aabbJ \mid - aabbcI \mid - aabbc$ .

Грамматиката, пораждаща даден език може да не е единствена. Безконтекстната граматика  $G = \{V, W, S, P\}$ ,  $V = \{a, b, c\}$ ,  $W = \{S, A, B, C, D, E, F\}$  и правила

$$P = \{S \rightarrow aAF, A \rightarrow aBF/aDF/b, B \rightarrow aEF, C \rightarrow b, D \rightarrow bC, F \rightarrow c, E \rightarrow bD\}.$$

също поражда езика  $L = \{a^n b^n c^n; 1 \leq n \leq 3\}$ .

**Пример 4:** Построяване на безконтекстна граматика, пораждаща езика описващ “X” и “Y” хромозомите (Ledley, 1965, фиг. 1).



Фиг. 1. Представяне на хромозомите “X” и “Y”

Езикът, описващ хромозомите може да се построи с помощта на пораждащата граматика с два стартови символа  $S_1 = \langle \text{“X” хромозома} \rangle$  и  $S_2 = \langle \text{“Y” хромозома} \rangle$   $G = \{V, W, S, P\}$ ,  $V = \{a, b, c, d, e\}$  (фиг. 1),  $W = \{ \langle \text{“X” хромозома} \rangle, \langle \text{“Y” хромозома} \rangle, \langle \text{двойно разклонение} \rangle, \langle \text{ляв клон} \rangle, \langle \text{десен клон} \rangle, \langle \text{разклонение} \rangle, \langle \text{страна} \rangle, \langle \text{дъно} \rangle \}$ ,  $S = \{S_1, S_2\}$  и правила на граматиката P:

- $\langle \text{“X” хромозома} \rangle \rightarrow \langle \text{двойно разклонение} \rangle \langle \text{двойно разклонение} \rangle$
- $\langle \text{“Y” хромозома} \rangle \rightarrow \langle \text{дъно} \rangle \langle \text{двойно разклонение} \rangle$
- $\langle \text{двойно разклонение} \rangle \rightarrow \langle \text{страна} \rangle \langle \text{двойно разклонение} \rangle$
- $\langle \text{двойно разклонение} \rangle \rightarrow \langle \text{двойно разклонение} \rangle \langle \text{страна} \rangle$
- $\langle \text{двойно разклонение} \rangle \rightarrow \langle \text{страна} \rangle \langle \text{десен клон} \rangle / \langle \text{ляв клон} \rangle \langle \text{разклонение} \rangle$
- $\langle \text{ляв клон} \rangle \rightarrow \langle \text{разклонение} \rangle c$

$\langle \text{десен клон} \rangle \rightarrow c \langle \text{разклонение} \rangle$   
 $\langle \text{дъно} \rangle \rightarrow b \langle \text{дъно} \rangle / \langle \text{дъно} \rangle b/e$   
 $\langle \text{страна} \rangle \rightarrow b \langle \text{страна} \rangle / \langle \text{страна} \rangle b/b/d$   
 $\langle \text{разклонение} \rangle \rightarrow b \langle \text{разклонение} \rangle / \langle \text{разклонение} \rangle b/a$

В общият случай след като граматиката е конструирана, може да се построи и разпознаваща система. За всеки клас образи се построява съответна граматика  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Нека с  $\mathbf{x}$  означим непознат образ зададен като стринг (дума). Трябва да се определи на кой от езиците  $L_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , породени от граматиките  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  принадлежи образът  $\mathbf{x}$ . Бихме могли да отговорим на този въпрос, ако построим дървото на извод (дърво за граматически разбор).

**4. Заключение.** В контекста на казаното дотук можем да кажем, че разглежданата тема предлага анализирането на конкретни задачи, които се свеждат до задачи – компоненти. Тя позволява описание на решението на задачи по нов начин, изразяващ алгоритмичният подход в обучението и дава възможност да бъде направена връзка с други изучавани дисциплини, както и да покаже тяхната взаимобвързаност, третира въпроси засягащи обема, дълбочината, тематичната насоченост и интегрирани фундаментални знания в областта на дисциплините *Разпознаване на образи* и *Дискретна математика*, преподавани на студентите от специалност “Информатика” в ЮЗУ “Н. Рилски”. Разгледани са задачи за разпознаване в термините на дискретната математика в отделни примери, използвани като илюстрация на теоретични постановки.

Представената работа е поредна стъпка в интегрираното обучение по двете учебни дисциплини, както и в посока усъвършенстване на методиката за интегрираното им преподаване.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] И. ГАНЧЕВ и др. Методика на обучението по математика (Обща част), Благоевград, Университетско издателство “Н. Рилски”, Благоевград, 2002 година, стр. 98.
- [2] Й. ДЕНЕВ, Сл. ЩРАКОВ. Дискретна математика, Университетско издателство “Н.Рилски”, Благоевград, 1995
- [3] Ю. И. ЖУРАВЛЕВ, И. Б. ГУРЕВИЧ. Разпознаване, класификация, прогноз. Математичеките методи и приложение. Вып. 2., Москва, Наука, 1989, 302 с.
- [4] Кр. МАНЕВ. Увод в дискретната математика, Трето издание, КЛМН, София, 2003.
- [5] Н. СИНЯГИНА, М. ТОДОРОВА. Разпознаване на образи, Университетско издателство “Н. Рилски”, Благоевград, 2007.
- [6] М. ТОДОРОВА, Д. БИРОВ. Разпознаването като подход в обучението по информатични дисциплини. *Математика и математическо образование*, **35** (2004), 449–454.
- [7] Сл. ЩРАКОВ, Кр. ЙОРДЖЕВ, М. ТОДОРОВА. Ръководство за решаване на задачи по дискретна математика, Университетско издателство “Н. Рилски”, Благоевград, 2004.
- [8] FRIEDMAN МЕНАНЕМ, АВРАНАМ КАНДЕ. Introduction to pattern recognition: statistical, structural, neural, and fuzzy logic approaches. *Series in machine perception and artificial intelligence*, **32** (1999), 243–252
- [9] М. ТОДОРОВА, N. SINYAGINA. Pattern Recognition as A Process in Teaching Mathematical Disciplines. Proceedings, International Conference on Mathematics Education, 3-5. June 2005, Svishtov, 260–266.

Маргарита Тодорова  
ЮЗУ “Неофит Рилски”  
Благоевград  
e-mail: [todorova@swu.bg](mailto:todorova@swu.bg)

## **APPLICATION METHODS OF PATTERN RECOGNITION IN TRAINING OF DISCRETE MATHEMATICS**

**Margarita Todorova**

In this paper an interconnection between subjects “Pattern recognition” and “Discrete mathematics” are studied. Subjects are part of teaching schedule in “Computer Science” educational program at SWU “N. Rilski”.

This work presents attempt to answer a number of questions which arise in process of education of students in speciality “Computer Science”: How to proceed and how deeply to develop subjects and material in mathematical and computer science subjects? What kind of pedagogical approach to follow when we teach students in respect to answer the current tendencies in education and business technology extensive development.