

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2010
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2010
Proceedings of the Thirty Ninth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Albena, April 6–10, 2010

НАУКА И ИЗКУСТВО:
ИСТОРИЯ НА ВЗАИМНО ВДЪХНОВЕНИЕ

Павел Бойчев

Този доклад представя едногодишен експеримент, започнал с тестове на компилатор, преминал през динамични системи с комплексни числа и завършил с картинна галерия, за която допринесоха познати и непознати от целия свят. Работата през тази година демонстрира, че е възможно да се свържат науката и изкуството по начин, който е полезен и за двете. Показано е как науката може да вдъхнови създаване на произведения на изкуството, а също и как тези произведения могат да вдъхновят бъдещи научни изследвания.

Факторите “А-ха!” и “И-ха!”. Науката и изкуството са приемани като различни области от глобалния спектър на човешки дейности. Въпреки това много учени черпят вдъхновение от изкуството и много художници враждат наука в своите произведения.

Преди да започнем историята за взаимното вдъхновение, да се дефинираме да определим какво е това *наука* и *изкуство*. Разбира се, няма да успеем. За тези понятия има достатъчно много дефиниции, като никоя от тях не е достатъчно всеобхватна и прецизна. Вероятно общото между науката и изкуството е, че и двете отговарят на стремежа на хората към красота в най-широкия смисъл на думата. Разликата е, че красотата в изкуството се възприема на първично ниво, докато тази в науката изисква осмисляне. И ако първичната красота дефинираме като това, пред което човек възкликвава “*И-ха!*”, то на красотата с осмисляне би съответствало “*А-ха... И-ха!*”

На красотата в изкуството няма да се спираме подробно, до нея се е докоснал всеки по един или друг начин още от ранно детство. Тази красота е субективна, но субективна е и красотата в науката. Нека от най-абстрактната наука, математиката, изберем твърдението на Ойлер:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Красива ли е тази формула? В нея са обединени по уникален начин пет фундаментални константи в математиката, операции от три последователни нива (събиране, умножение, степенуване) и равенството.

Еlegantният и концентриран вид на това твърдение допринася съществено за фактора “*И-ха!*”, но само ако човек осъзнае тези неща, минавайки преди това през “*А-ха!*”-то. За нематематика тази формула си е просто набор от символи.

Това поражда въпроса защо хората учат математика? Дали защото това им помага да смятат по-добре или защото тя открива пред тях нови красиви светове?

Езикът Лого. Обучението по математика независимо от причините, които го изискват, се е извършвало по почти един и същ начин от векове насам. Дали наистина това е най-добрият начин трудно може да се каже. Отговорът зависи от много субективни фактори. Има вероятност традиционният начин на обучение по математика да е най-утъпканият път, но дали е най-късият към върха, от който се вижда красотата на математиката?

Преди повече от 40 години е направен уникален опит да се слее математиката и изкуството по начин, който е достъпен за деца. Създаден е езикът Лого (Logo), с който децата могат да програмират костенурка да се движи и рисува. Като език Лого е лек, достъпен и позволява на децата да влагат собствените си представи за красота чрез използването на математически и алгоритмични принципи и понятия.

Уникалното в този опит е не само свързването на неща, които са били считани за чужди, а и в това, че опитът все още продължава. Езикът Лого се развива активно и днес. До момента са известни повече от 230 различни диалекта и версии на езика, които са реализирани от компании, изследователски лаборатории, индивидуални учени и дори и от ученици. Това е единственият език, който има такова многообразие.

В историята на Лого има българска следа, започнала преди повече от 20 години със създаването на собствени версии – Geomland¹, TopLogo++, TGS, LGS, RLS. Традицията продължава и днес, като последните две разработки са Elica² – обектно-ориентиран диалект на Лого с възможност за интерактивна тримерна графика в реално време, и Lhogho³ – единственият в света компилатор, който преобразува Лого програми директно в машинен код.

Множеството на Манделброт. Създаването на Lhogho е продиктувано от нуждата от по-голяма производителност особено в мултимедийните приложения. В края на 2008 г. бе решено да се проведат тестове за скоростта на Lhogho. Относно математическите операции бе избрано тестването да се прави с итеративното прилагане на формулата:

$$z \leftarrow z^2 + c$$

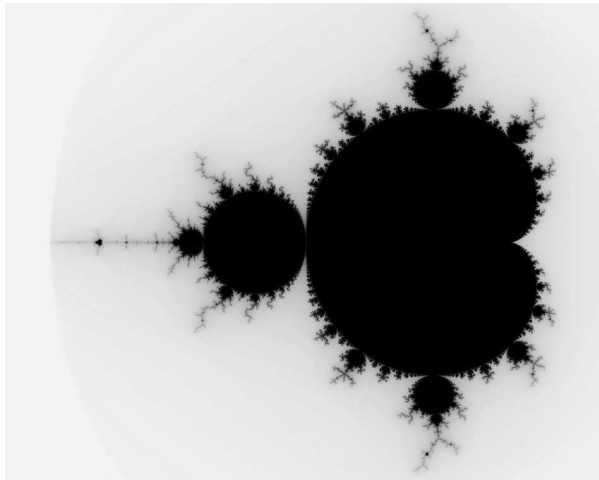
където z и c са комплексни числа. Дали тази формула е красива? Нематематиците биха коментирали, че си е просто някаква формула. Оказва се, че в тази формула има скрита не само математическа, но и художествена красота, открита преди повече от три десетилетия. Тогава математикът Беноа Манделброт за първи път в света използва компютър за изобразяване на поведението на динамична система. През 1975 г. той въвежда термина *фрактал*, за да означаи обектите с дробна размерност [1].

Неговите научни изследвания водят до зараждането на фракталната геометрия – връзката между класическата математика и хаоса в атмосферната турбуленция, биологическите популации и стоковите пазари. Десетилетия преди фракталите да бъдат наречени *фрактали*, те са били изучавани от редица математици като К. Вайерщрас, Кох, Леви, Г. Кантор, А. Поанкаре и Жулия.

¹Проект Геомландия, <http://sunsite.univie.ac.at/elica/PGS/INDEX.HTM>

²Проект Elica, <http://elica.net>

³Проект Lhogho, <http://lhogho.sourceforge.net>



Фиг. 1. Множество на манделброт

Откритият от учения фрактал се нарича *множество на Манделброт* – Фиг. 1. То съдържа всички точки в комплексната равнина, за които итеративното прилагане на полином над начална стойност 0 води до ограничена редица. Всъщност фракталът е границата на това множество, която често се изобразява в черно. Математически, множеството на Манделброт M се дефинира като:

$$f : C \rightarrow C$$

$$f(z) = z^2 + c$$

$$M = \left\{ c \in C : \sup_{n \in \mathbb{N}} |f^n(0)| < \infty \right\}, \quad f^1 = f, \quad f^n = f(f^{n-1}),$$

Оцветяването на останалите точки, не принадлежащи на множеството, се определя от степента, с която получената от тях редица достига определена граница, отвъд която няма елементи от фрактала [2]. Именно точките в околността на M демонстрират връзката между науката и изкуството – Фиг. 2.

Техническото изчисляване на фрактала не представлява трудност – комплексните числа се представят като точки в равнината, а цветът се определя от скоростта на разходимост [3]:

За всяка точка c :

$$z = 0$$

за $n = 0$ до max :

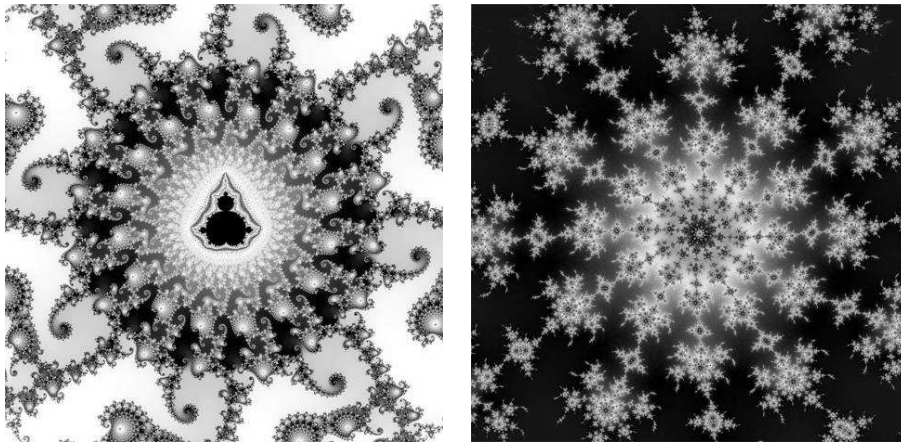
ако $|z| > 2$ тогава оцвети c в цвят n . край

иначе повтори със $z = z^2 + c$

за $n = max$: оцвети c в цвят 0. край

Увеличените изображения на фрактала показват, че той има практически безкрайна дълбочина – Фиг. 2. В някои от плакатите е достигнато мащабиране от над трилион пъти. Един от тях (елемен a_{34} от матрицата на Фиг. 7) е специално отреден за безкрайното разнообразие на фрактала. В описанието му се казва, че ако изображението бе в реален размер, то целият фрактал би се прострял отвъд Слънцето.

С използването на библиотека за работа с по-голяма точност лесно може да се



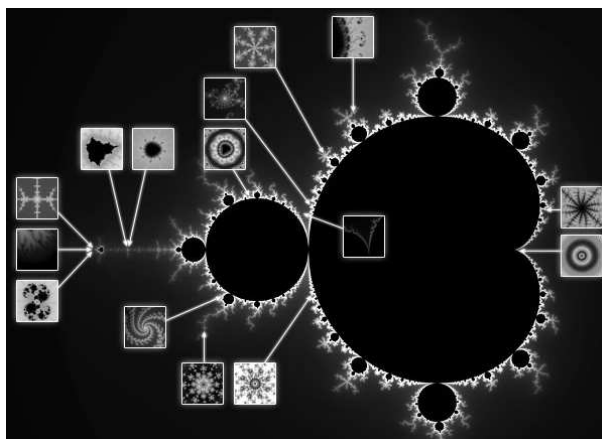
Фиг. 2. Два увеличени фрагмента от околността на фрактала

стигне до размери на фрактал, които са по-големи от познатата ни Вселена. Това не е предмет на нашите разглеждания, защото съществуват вече подобни програми, а и художественият потенциал на масово достъпната изчислителна точност все още не е изчерпен.

Художествената изложба. Първите генерирани изображения с Lhogho потвърдиха очакваната изчислителна скорост. Опити да се генерира фрактал с други версии на Лого изискваха минути, дори и часове за изчисляването на изображение от около един милион пиксела. Lhogho се справи със задачата за секунди.

Създадените изображения вдъхновиха създаването на интерактивна версия на програмата, при която потребителят може многократно да влиза в дълбочина на избрани от него места и да разглежда детайлите в уголемен вид.

Разглеждането на многообразието от форми и цветове даде началото на изследва-



Фиг. 3. Карта на избраните фрагменти от фрактала

не на фрактала и осъзнаване на неговата сложност. Бяха генерирани изображенията на десетки места, които предизвикаха асоциации с предмети и явления от околния свят, като например гора през нощта, слънчеви протуберанси, сметана в чаша кафе и т.н. От тези изображения бяха избрани 15-те показани на Фиг. 3. Те бяха обработени дигитално и смесени с реални фотографии. Резултатите бяха обсъдени с колеги и така постепенно изникна идеята да се направи галерия от фрактали.

Създаването на плакатите предизвика серия от проблеми, които по принцип не се асоциират нито с математиката, нито с писането на софтуер. Такива проблеми бяха да се определи съдържанието на плакатите, така че да се разшири потенциалната зрителска аудитория. Други несвойствени проблеми бяха изборът на обекти и явления от реалния свят, които да се илюстрират, а също и намирането на подходящи фотографии и получаването на разрешение от техните автори да се ползват.

Всеки от плакатите е наситен с информация. Освен самият фрактал и художествената му интерпретация са показани технически данни (координати и мащаб), а също и допълнителна информация за интересни факти и събития.

Идеята за изложба се роди през есента на 2008. Половин година по-късно плакатите бяха готови на ниво графични файлове. Последната стъпка – организирането на самата изложба, бе посветено на 120 годишнината от основаването на Факултета по Математика и Информатика към СУ.

С помощта на ФМИ и на колеги от ФМИ изложбата беше открита на 24 октомври 2009 с надслов една мисъл на самия Беноа Манделброт:

Бидейки език, математиката може да се използва не само за даване на информация, но и за изкушаване.

Първите посетители, които коментираха изложбата, бяха хората грижещи за чистотата в сградата. След това бяха преподавателите, идващи на работа и последни бяха студентите. Интересно и (засега) необяснимо явление беше, че много често посетителите разглеждаха изложбата в групи от по четирима – Фиг. 4.



Фиг. 4. Обсъждане на картините по групи

За тези, които не могат да посетят изложбата на живо, е направен он-лайн вариант⁴, въпреки че представените там плакати не пресъздават със същата сила

⁴Он-лайн изложба, <http://mandelbrot-set.elica.net>

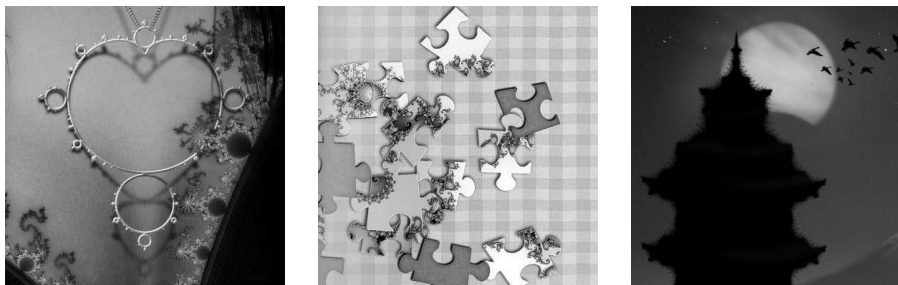
“И-ха!”-то на изложбата, където фракталите са показани с екстремална степен на детайлност.

На Фиг. 7 са показани умалени изображения на всичките 15 плаката. Освен тях изложбата съдържа и уводен плакат, в който е обяснено накратко кой е Манделброт и как се получава фракталът, който носи неговото име. Показан е и алгоритъмът за изчертаване на множеството на Манделброт и неговата околност, а също и два от най разпространените начини за оцветяване.

Резултати и поуки. Една от тайните цели на изложбата бе да предизвика размишления в най-различни посоки, достигайки до пълна интердисциплинарност. Всеки от плакатите е свързан с някаква тема от нашия живот, което предоставя начален тласък към бъдещо развитие. В плакатите се засягат обекти и явления от астрономията, биологията, палеонтологията, физиката, историята, геологията, математиката, метеорологията, географията, производството на битови стоки, бижутерството, занаятчийството и забавните семейни игри. С голяма условност може да разделим тематиката в следните направления:

- “Време”. Темите в изложбата се простират от 100 милиона години в миналото до 5 милиарда години в бъдещето.
- “Живот”. Някои плакати са за праисторически насекоми, други са за микроорганизмите и . . . извънземния живот.
- “История”. Коментират се исторически личности и събития като Южин Шумейкър, който е погребан на Луната; китайският монах Ло Тиан, който изобретил фойерверките; Менехъм, учител на Александър Велики и откривател на хиперболата и Аполон, който ѝ дал име.
- “Ежедневие”. Това направление включва факти за обектите около нас. Например, чаша кафе симулира турбуленция в мащаб, който все още не може да се обработи от най-съвременните суперкомпютри; първоначално циповете са били използвани само за ботуши и за детски облекла, а левите и десните обувки се произвеждат от преди по-малко от два века.
- “География”. Фактите в плакатите се отнасят до различни географски места по земята, като Испания, където е намерен най-древният кехлибар, уловил насекоми от три от четирите сега съществуващи разреци летящи насекоми; островите Токара в Япония, където през 2009 е наблюдавано най-дългото слънчево затъмнение за този век; или пък Хинг-Конг с невероятното си излъчване през нощта.
- “Компютърна графика”. Много от артистичните интерпретации на фрактала са чрез съчетаване на цифрови фотографии с компютърно генерирани изображения. Това съчетаване е сложен процес, който изисква разнообразни техники. Някои от обектите са създадени изцяло изкуствено, без да се използва снимка на реален обект. Например, на Фиг. 5 бижутото с формата на фрактал е изцяло изкуствено; всяко от 361-те части на пъзелата са направени ръчно; а пагодата е сглобена от формата на фрактала.

Едно от най-важните неща, научени по време на създаване на изложбата през последната година е, че важен фактор за успеха на един проект е сътрудничеството на много хора и използването на ресурси от много места. Хората, които създават научни или художествени продукти, са щастливи, когато техните творения се из-



Фиг. 5. Изкуствено създадени обекти

ползват от други хора или поне, ако те ги вдъхновяват да творят.

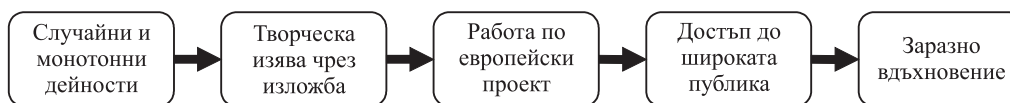
Важна поука е да не се страхуваме да експериментираме с идеи и техники, които са изцяло нови и непознати за нас. Изложбата бе направена от човек, който никога преди не беше правил изложба. Почти всичко беше нещо ново – от искането на разрешение за ползване на фотографиите, през работата с компания за голямформатен дигитален печат – до слагането на рамки и инсталирането в изложбена зала.

Би било идеално, ако създаването на тази изложба или този доклад вдъхнови зараждането на различни образователни дейности като:

- по-подробно изследване на фрактала и търсене на паралели между негови фрагменти и обекти/явления от живота;
- откриване на допълнителна информация за малко известни факти;
- практикуване на умения за цифрова обработка на изображениям
- разработването на нови, по-бързи алгоритми за генериране на фрактал;
- използването на науката за създаване на художествени произведения.

Всеки един от плакатите съдържа достатъчно данни, за да породи идеи за нови изследвания на училищно или университетско ниво. Изложбата се оказа само начален етап от един по-дълъг процес – Фиг. 6.

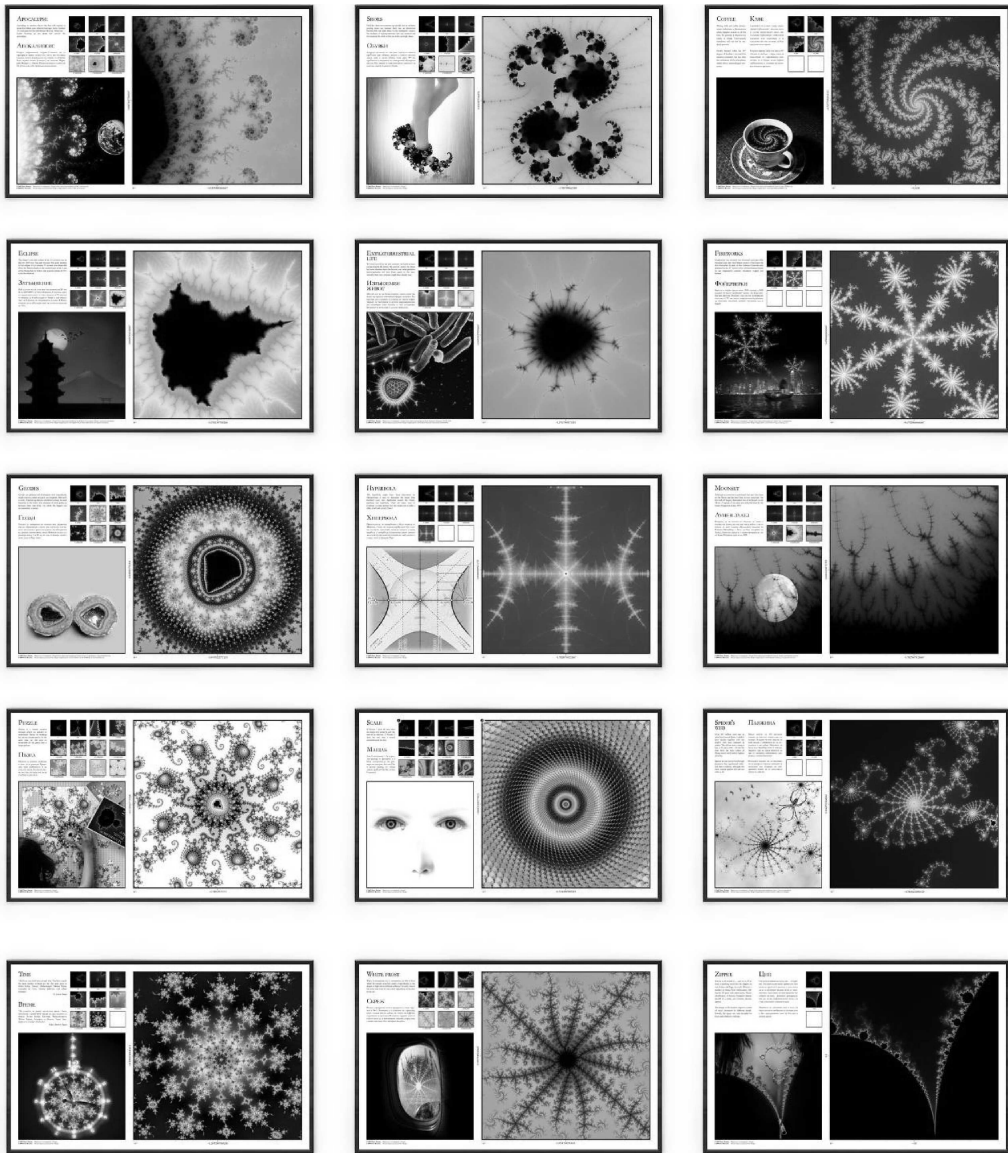
В един от плакатите е спомената интересна задача за генерирането на конични сечения в домашни условия с използването на светлина. Решаването на тази задача породи участието в международния проект InnoMathEd⁵ (Innovation in Mathematics Education on European Level), за който бяха създадени интерактивни демонстрационни приложения.



Фиг. 6. Каскадни събития

Участието в проекта породи от своя страна създаването на пакет от десетки виртуални механични устройства за генерирането на различни математически криви и повърхнини. Демонстрации на тези устройства са достъпни за широката публика

⁵Проект InnoMathEd, <http://www.math.uni-augsburg.de/prof/dida/innomath>



Фиг. 7. Изложбата в умален вид

по целия свят⁶. Разработването им доведе до откриването на интересни механизми, като например такъв, който генерира по елементарен начин Мьобиусов лист⁷. Виртуалните механизми вече са вдъхновили други хора да правят собствени разработки на базата на тези механизми.

Бъдещи планове. Освен постоянната изложба във Факултета по математика и информатика, умалена версия на плакатите са в частна колекция в Австралия. Част от плакатите в електронен вид са изпратени до научни и образователни организации в Северна Америка. В процес на договаряне са изложби в Париж и Генуа. От артистична и технологична гледни точки бъдещата работа може да бъде ориентирана към създаването на видеоклип, генерирането на тримерна графика или използването на специализирани библиотеки за по-голяма дълбочина на навлизане във фрактала.

За щастие е невъзможно да се предвидят всички планове за бъдещето. Цялата изложба бе вдъхновена от иначе монотонното измерване на производителността и може би в това се крие най-важната поука – дори и най-скупната реалност може да активира човешката изобретателност и креативност. Единствено трябва да се улови първоначалният момент и след това да се използва инерцията.

Благодарности. Създаването на плакатите изискваше общите усилия на много хора във всеки момент – от създаването на първоначалния дизайн до окачването им в залата. Различни хора са допринасяли като са предоставяли собствени фотографии, идеи за развитие, езикови консултации или пък са участвали физически в подготовката на плакатите.



Фиг. 8. Ценна колегиална помощ при инсталиране на изложбата

Някои от художествените интерпретации използват цифрови снимки направени, от автори пръснати по целия свят – от Япония до Канада и САЩ. Първоначалните очаквания бяха, че около 10% биха дали съгласие, без да претендират за специални лицензи, затова се предполагаше, че търсенето на подходящи фотографии щеше да продължи много.

За щастие всички автори, които отговориха, бяха съгласни да предоставят своите снимки, затова още веднъж изказваме благодарност към Анет Олсън, Даисуке

⁶Mathematical Devices, <http://www.youtube.com/elicateam#g/c/6534E936D46257BF>

⁷Moebiusograph (Мцбиусограф), <http://www.youtube.com/watch?v=3H4nnf89jf4>

Томиасу, Елфи Брендъл, Джон Съливън, Джон Френч, Николас Гиър и Саймън Тонг.

Изложбата е двуезична – текстовете са на английски и български, като за тяхното оформяне съществен принос имаха Луис Блайтън и Светла Бойчева.

Колеги от Софийски Университет и Българската Академия на Науките също оказаха съществена помощ – Магдалина Тодорова, Божидар Сендов, Димитър Добрев, Евгения Сендова, Елиза Стефанова, Евгения Ковачева и Николина Николова подкрепяха създаването на изложбата от самото ѝ начало. Специални благодарности отправяме и към Елица Бойчева за предоставените идеи и откритите грешки в художественото изпълнение.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] B. MANDELBROT. The Fractal Geometry of Nature. W. H. Freeman & Co., USA, 1983.
- [2] B. MANDELBROT. Fractals and Chaos : the Mandelbrot set and beyond. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [3] R. STEVENS. Creating Fractals. Charles River Media, Inc., Rockland, Massachusetts, 2005.

Павел Бойчев

Факултет по математика и информатика

СУ “Св. Кл. Охридски”

Бул. Дж. Баучер, № 5

1164 София

e-mail: boytchev@fmi.uni-sofia.bg

SCIENCE AND ART: A STORY OF MUTUAL INSPIRATION

Pavel Boytchev

Science and art are considered as two distinct areas in the spectrum of human activities. Many scientists are inspired by art and many artists embed science in their work. This paper presents a one-year experiment, which started with benchmark tests of a compiler, passed through dynamic systems based on complex numbers and ended as a scientific art exhibition. The paper demonstrates that it is possible to blend science and art in a mutually beneficial way. It also shows how science can inspire the creation of artistic works, as well as how these works can inspire further scientific research.