

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2010
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2010
*Proceedings of the Thirty Ninth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Albena, April 6–10, 2010*

**ИНОВАЦИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОТО ОБРАЗОВАНИЕ:
ЕВРОПЕЙСКИТЕ ПРОЕКТИ *InnoMathEd* И *Fibonacci***

Петър Кендеров

В доклада се разглежда участието на Института по математика и информатика на БАН, в два международни проекта, *InnoMathEd* и *Fibonacci*, посветени на иновации в математическото образование и тяхното разпространение в европейски мащаб. Специално внимание е отделено на очакваните резултати от проектите – разработката и разпространението на дидактически концепции, методологии и иновативни учебни среди (включващи динамичен софтуер), стимулиращи активността, отговорността и работата на учениците в изследователски стил.

1. За необходимостта от иновации в математическото образование. Необходимостта от личности със солидни знания и компетентност (включващи математически знания и технологични умения) се изтъква в редица документи на Европейската комисия [1–3]. В тях се обръща специално внимание на разработването и прилагането на иновативни подходи в обучението по математика и природни науки. За да се подготвят бъдещите граждани на общество, основано на знания и творчество, образованието (и по-специално математическото образование) трябва да предложи стратегии, които насърчават учителите и учениците да учат по нов начин, да изявяват творческия си потенциал и да се справят в ситуации, в които от тях се очаква да създадат нещо ново, нещо, което може да се споделя.

Същевременно изследванията на Rosard [3] показват, че интересът на младите хора към математиката и природните науки намалява най-вече поради начина, по който тези дисциплини се преподават в повечето европейски страни. Това е в съответствие с изводите от изследването TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) [4], според което решаването на задачи самостоятелно или в екип представлява сериозен проблем за голяма част от учениците. Експертите по математическо образование подчертават сериозната пропаст между теорията и практиката на новите педагогически форми – изследователския подход, екипната работа, работата по проект. За преодоляване на този проблем в последно време стартират редица европейски проекти, чиято основна цел е да се внедрят иновативни методи в математическото образование и да се осъществи по-здрава връзка между учените и дейците в сферата на математическото образование.

Този доклад съдържа информация за два европейски проекта, посветени на тези проблеми – *InnoMathEd* и *Fibonacci*. България участва в тях чрез Института по математика и информатика на БАН.

2. Проектът *InnoMathEd*.

2.1. Основни цели. Названието на проекта *InnoMathEd* е съкращение от английски на: *Innovations in Mathematics Education on European Level* (*Иновации в математическото образование на европейско равнище*).

Основната цел на проекта е да се разработят и внедрят иновативни дидактически концепции и педагогически стратегии, почиващи на използване на технологиите, за съществено подобряване на учебния процес в европейските страни. Новите образователни технологии почиват на информационните технологии, но не се свеждат само до тях. Те трябва да осигурят сериозен мост, за да може процесът на обучение и образование да излезе от училище, защото училището е само една част от дома на образованието.

Съвременните образователни технологии възникват спонтанно и се развиват (понякога хаотично) в целия свят. България също има с какво да се гордее в тази област. Въпросът днес е да се оцени кои от съществуващите в света технологии и практики са добри и подходящи за използване, как те да се ползват по-ефективно и как да обхванат целия Европейски съюз.

Специално ударение в проекта е поставено на т. нар. *динамична математика* (с използване на “динамичен” софтуер), която се оказва особено подходяща за стимулиране на индивидуалния и екипния стил в учебния процес. От функционална гледна точка същността на проекта е да се тестват, оценяват и разпространяват на европейско равнище разработените иновативни дидактически концепции, методологии и учебни среди, като акцентът пада върху активността на учениците, чувството им за отговорност и способността им да учат в изследователски стил. За оценяването на продуктите и концепциите, разработени в рамките на *InnoMathEd*, се използва специфичен инструментариум, който е достъпен “он-лайн”.

Партньорите в този проект са от 8 европейски страни, като централният координатор е в Университета в Аугсбург, Германия. Консорциумът се състои от 10 организации – три от Германия и по една от Австрия, България, Великобритания, Италия, Кипър, Норвегия и Чехия. Всеки от партньорите е известен с постиженията си в използването на информационни и комуникационни технологии в математическото образование. Същевременно всеки от партньорите има специфична история и перспектива, което позволява на консорциума да стъпи на най-доброто от различните добри практики и да предложи нови ефективни подходи за бъдещото обучение по математика в Европа.

Както се подчертава в документацията на проекта, амбицията на партньорите е резултатите от проекта да засегнат не само експерти в математическото образование, но и по-широк кръг от свързани с образованието специалисти и институции.

2.2. Целевите групи. Проектът предвижда три основни дейности, свързани с целевите групи (Фиг. 1).

Една от основните целеви групи са **учениците**. Очаква се, че в резултат на иновациите, предложени в проекта, учениците *не само ще постигнат задълбочено разбиране на изучаваните математически понятия, но и ще придобият компетентност, важна за ученето през целия живот*.

Освен дейностите, свързани с развитието на компетентността на учениците, основна компонента на *InnoMathEd* са и дейностите за повишаване квалификацията на **учителите**. Последните не само че не могат да бъдат заместени от техноло-



Фиг. 1. Активиране на основните целеви групи

гите, но имат решаваща роля за успеха на проекта. Основната опасност идва от това, че *технолозите често се третират предимно като обект на изучаване, а не като обогатяващо учебния процес средство. При това положение е естествено учителите да не са достатъчно мотивирани да използват новите технологии и практики* [5, 6]. Дори да признават ролята на активното учене, при което учениците са “в центъра на събитията”, често учителите нямат достатъчен опит, за да го прилагат в практиката си. Това поставя сериозни предизвикателства пред тези, които се занимават с подготовката на учителите. Те трябва да преподават в стил, който очакват да бъде приложен впоследствие от учителите в работата им с учениците. Ето защо в провежданите от партньорите по проекта семинари учителите влизат в ролята на ученици, които работят в *учебни среди*, предложени от *InnoMathEd*.

В проекта се превижда във всяка от страните-участнички да бъдат подготвени около 20 учители (или общо – около 140 души), които да усвоят разработените дидактически концепции и да ги внедрят в клас.

Третата важна целева група са **студентите по математика**. Сред тях са новото поколение учители и затова е важно да ги обучаваме в хармония с иновативната дидактика, която се опитваме да утвърдим чрез проекта. Предвижда се в учебното съдържание на университетите да се включат теми, отразяващи най-съвременните тенденции в използването на ИКТ в математическото образование.

Основен принос в това начинание има и *Съюзът на математиците в България* с изградената си инфраструктура и със сериозния си опит в разпространяване на добрите педагогически практики на всички нива.

2.3. Подходът и оценяването. Една от най-важните идеи, свързани с преодоляването на изброените по-горе проблеми в математическото образование в европейските страни, е да се създадат *учебни среди* с динамична математика, които да играят ролята на своеобразен катализатор на иновативните концепции в *InnoMathEd*. Понятието **учебна среда** в контекста на проекта се отнася до *среда, в която се използват дигитални технологии и на учениците се предоставят*

подходящи средства за социално общуване, както и съдържание за адаптивен учебен процес [7]. В този смисъл учебната среда следва да се възприема като нещо многоаспектно, съчетаващо едновременно средства и съдържание така, че да отговаря най-добре на специфичните нужди на конкретния ученик. При разработката на учебните среди се взема под внимание и необходимостта от планиране и управление на учебния процес.

Всеки от участниците в целевите групи на проекта може да работи с предложените от специалистите учебни среди, да ги изпробва в практиката си, да ги модифицира според спецификата на аудиторията си и да предложи свои собствени разработки. Партньорите по проекта намират такава цел за осъществяване въз основа на предишния си опит с използването на динамичен софтуер от типа на GEONExT [8], GeoGebra [9] и Elica [10]. В стратегията за работата в учебните среди на *InnoMathEd* са залегнали идеите на конструкционизма, според които, *за да се постигне по-добра ефективност в учебния процес, фокусът трябва да бъде върху активността на ученика (а не на учителя), върху конструирането на знанието (а не върху функционалните характеристики на софтуера)* [11].

В специално издание на IJCSML (международно списание за приложенията на компютрите в обучението по математика), посветено на динамичния софтуер по геометрия [12], авторите се обединяват около становището, че подходящото използване на такава компютърна среда дава възможност на учениците да изследват закономерности, да формулират хипотези, да ги проверяват и по този начин да се докоснат до стила на работа на професионалните математици.

За проекта е важно софтуерът да бъде общодостъпен за представителите на трите целеви групи. Всеки партньор, който участва непосредствено в образованието, предлага разнообразни курсове за студенти и учители, чрез които последните да се запознаят с идеите, концепциите и иновациите на *InnoMathEd* и впоследствие да ги внедрят в училище. По този начин се обхваща и третата целева група – учениците.

Всеки партньор работи в хармония с образователната “рамка” в конкретната страна, защото е ясно, че няма стандартни и универсални решения на всички проблеми. В същото време обмяната на плодотворни идеи, на резултати, на добри практики дава възможност на всеки партньор да усъвършенства дейностите си по проекта. Един широк спектър от подходи води до по-добро взаимно разбиране и опознаване на образователните и културните традиции не само на страните-участници в проекта, но в перспектива – и на всички останали европейски страни. Така че, дългосрочната цел на *InnoMthEd* е да се създаде образователна стратегия, която да бъде релевантна за всички европейски страни [13].

За да се отрази мнението на целевите групи към подхода на *InnoMthEd* е разработена он-лайн анкета, в която участниците споделят предишния си технологичен опит и впечатленията си от работата с предложените учебни среди. Анкетата на официалния сайт на проекта е на работния език (английски), но за българските участници е направен превод, за да се осигури разбирането на всички нюанси във въпросите.

2.4. Първите семинари по проекта *InnoMathEd* Българският екип организира в рамките на първата година на проекта четири семинара с учители и експерти по математика и информатика в България и един международен семинар в Охрид (на конгреса на MASSEE). Решаваща роля в подбора на участниците

имаха регионалните експерти, които препоръчаха учители с изявен интерес в използването на информационни технологии (и по специално – на динамичен софтуер) в обучението по математика.

В **първия семинар (септември 2009 в София)** участваха 22 учители от различни краища на страната (Варна, Велико Търново, Видин, Враца, Горна Оряховица, Ловеч, Монтана, Пловдив, Русе, София, Троян, Шумен). Той бе проведен в най-модерната компютърна зала на ИМИ – с 22 работни места, високо-скоростен интернет, което даде възможност учителите самостоятелно да заредят необходимия софтуер (GeoGebra, Elica и нейните приложения *Origami Nets*, *Cubix Editor*, *Math Wheel*, *Bottle Design*, *Potter Wheel*) и да проиграят първите предложени от екипа дидактически сценарии [14].

Десислава Димкова представи сценарии на тема геометрични трансформации в средата GeoGebra, разработени от нея по идеи на Любомир Давидов, един от пионерите на внедряването на компютърни среди от изследователски тип в математическото образование.

Сценарии за развиване на пространственото въображение на учениците от прогимназиалния курс с помощта на приложения на компютърната среда Elica, бяха представени от Тони Чехларова. Тя се спира на обнадеждаващата обратна връзка, получена от учители и ученици при работа с тези приложения в рамките на предишен проект (DALEST), и подчерта, че при работа с тях могат да се решават стереометрични задачи от доста висока сложност, без да са необходими особени технически умения.

Идеите на конструкционизма (и в частност – на Лого като образователна философия) бяха илюстрирани от Евгения Сендова. Участниците преживяха идеята “без праг и без таван” в контекста на костенурковата геометрия – от въвеждането на понятието “симетрия” до конструирането на фрактали с помощта на командите НАПРЕД и НАДЯСНО.

Всички лектори подчертаха ролята на учителите като партньори на учениците си в един изследователски процес. Участниците проявиха голяма активност не само като потребители на предлаганите сценарии, но и като автори на интересни задачи, вече изпробвани сценарии в практиката си и нови идеи, с които да се обогати учебното съдържание на проекта.

Накрая учителите попълниха следната анкета:

- *Нарисувайте фигура и напишете една дума, с които да изразите настроението си.*
- *Какво предлагате за по-добро разпространение на материалите по проекта в българския контекст?*
- *Какви възможности виждате за прилагане на учебните среди, разгледани на семинара, във Вашата работа?*
- *Имате ли предложения (идеи) за собствен сценарий или модификация на сценариите, предложени на семинара? В каква компютърна среда?*
- *Какви препоръки имате за следващия семинар?*

Повечето от нарисуваните фигури и написаните фрази отразяваха ентузиазъм: *Готов съм да пробвам, слънчево и радостно, заинтригувана, оптимистично, празнично, красота.* Най-честите препоръки включваха следното:

- публикуване на всички материали на български (Интересно е, че имаше и предложение за семинар с работен език – английски)
- необходимост от допълнителни стимули за мотивиране на учителите-новатори
- организиране на пътуващи семинари
- периодични срещи за разпространение на добрите практики
- организиране на по-малки работни групи за разработването на конкретни теми
- организиране на дискусии
- организиране на конкурс между действащи и бъдещи учители за разработване на сценарии по конкретна тема; оценяване и разпространяване на най-добрите продукти
- формулиране на *отворени проблеми*, които да бъдат изследвани от ученически екипи в подходяща компютърна среда
- разработване на сценарии в съответствие с съществуващото учебно съдържание
- структуриране на предложените по проекта сценарии в съответствие с възрастта на учениците
- публикуване на видео-филми с примери на добри практики в предлаганите учебни среди
- популяризиране на проекта посредством националните медии
- поддръжка на активна виртуална връзка между участниците в семинара и екипа на проекта
- публикуване на кратки електронни ръководства за работа с предложените компютърни среди.

Вторият семинар бе в рамките на международния конгрес MASSEE – Охрид, 6–20.09.2009. Той бе посветен на паметта на Любомир Давидов. Участваха математици и специалисти по математическо образование от България, Германия, Република Македония, Румъния, Сърбия, Хърватия. Макар да нямаше условия за индивидуална работа с компютър, публиката бе много активна – с ценни предложения и идеи за развитие на предложените дидактически сценарии.

Следващите семинари, проведени в България, бяха в резултат на активността на експерти по математика и информатика, участващи в семинар в Баня. По покана на експертите от Монтана и Враца членове на екипа посетиха тези градове и проведоха специализирани занятия с учители по математика, информатика и информационни технологии от прогимназиалния и средния курс.

Първите резултати, постигнати от участниците в семинарите, бяха докладвани на **Национален семинар, посветен на творчеството и иновациите в математическото образование**, който се проведе в края на декември в ИМИ-БАН. Свои разработки, свързани с идеите на проекта, докладваха Даниела Петрова (Немска езикова гимназия “Проф. Константин Гьълбов”, София), Антоанета Стоименова (ОУ “Св. Кл. Охридски”, с. Камен, област Велико Търново), Ангел Гушев (ПМГ “В. Друмев”, Велико Търново). Особено интересни бяха впечатленията на Йорданка Еленкова, експерт от област Монтана, която в доклада си представи как учители от прогимназиалния и средния курс в областта започват да внедряват идеите на *InnoMathEd*: (5. клас – използване на GeoGebra в темата за лица на фигури; в 6. клас – работа с GeoGebra и GeoNext при изучаване на координатната система; в 7. клас – изучаване на свойствата на геометрични фигури с GeoGebra; в 11. клас –

изучаване на показателната и логаритмичната функция с помощта на GeoGebra. Тя коментира не само готовността на учителите да действат като изследователи заедно с учениците си, но и реакциите на самите ученици. Тяхното самочувствие на хора, които са готови не само да отговарят на въпроси от тестове или да решават рутинни задачи с известен отговор, но и сами да задават математически въпроси и да формулират хипотези, вдъхва оптимизъм за това, как математическото образование в България може да отразява духа на математиката като наука.

Разпространението на изследователските подходи в обучението по математика и природните науки в по-широк мащаб е предмет на следващия проект, на който ще се спрем – *Fibonacci*.

3. Проектът *Fibonacci*. Проектът *Fibonacci* е идейно свързан с *InnoMathEd*. След като вече сме се спрели на някои учебни среди и концепции, които са се оказали добри, идва ред на масовото им разпространение. В това се състои и основната цел на проекта *Fibonacci* – учебните среди и стратегиите за използването им, идентифицирани като ефективни за математическото образование, да получат подобаващо разпространение.

3.1. Основни идеи и цели. Работата по проекта ще се ръководи от научен комитет от експерти в областта на образованието по математика и естествени науки. Проектът ще се координира от *Ecole normale supérieure* (Франция) съвместно с университета *Bayreuth* (Германия). Консорциумът включва 25 институции от 21 страни, като България е предствена от ИМИ-БАН. Оценяването на резултатите ще бъде извършено от външни експерти.

Процесът на разпространение на добрите практики се основава на специален подход, аналогичен на модела за развъждане на зайци, където динамиката на популацията се описва с числата на Фибоначи. Реализацията на проекта се опира на 12 **отправни центрове (Reference centers)** и 24 **дублиращи центрове**, т. нар. **центрове-близнаци (Twin centers)**. Отправните центрове са избрани въз основа на връзката със значителен брой училища и с капацитета си по отношение на прилагане на изследователски подходи в обучението. Те ще бъдат свързани с 12 **центъра-близнаци-1** и с 12 **центъра-близнаци-2**. Центровете-близнаци-1 са с една стъпка по-напред в прилагането на изследователските подходи от Центровете-близнаци-2. И едните, и другите получават обучение и научно ръководство в продължение на 2 години, за да станат от своя страна отправни центрове и да започнат разпространение (лесно се вижда, че тази схема на разпространение съответства на редицата от числа на Фибоначи).

Работата на партньорите по проекта ще бъде фокусирана върху пет теми, които ще бъдат в основата на обучителните сесии. Темите са следните:

- задълбочаване на спецификата на научно-изследователските подходи в математиката;
- задълбочаване на спецификата на научно-изследователските подходи в естествените науки;
- внедряване и разширяване на отправните центрове;
- интердисциплинарни подходи;
- използване на околната среда за обучение по математика и по естествени науки.

Основната цел е да се проектира, внедри и оцени процес на разпространение на научно-изследователски подходи в обучението по математика и природни науки в основното и средното училище.

Основни принципи в работата са:

- работа по проекти,
- прилагане на научно-изследователски подход (включително и експерименталния подход) в математиката,
- извличане на полза от грешките,
- учене с натрупване,
- отчитане на ограниченията на предмета и интердисциплинарен подход,
- насърчаване на екипната работа,
- самостоятелна работа/учене,
- привличането на общостите по региони, като фактор в изследователския подход в обучението по математика и естествени науки.

3.2 Схема на разпространение на добрите практики. Отправните центрове дават началната матрица на проекта. Те се отличават с:

- международно признание по отношение на използването на научно-изследователски подходи в изучаването на математиката и естествените науки,
- осигуряване на педагогически ресурси и учебни материали за достатъчно голям брой училища,
- значителен опит в обучението и в научното ръководство на учители,
- компетентност при работа с местни организации, свързани с образованието
- връзки с институции и университети, свързани с научни изследвания в областта на образованието, математиката и естествените науки.

Центровете-близнаци са разделени на две категории в зависимост от предишния си опит от внедряване на изследователските подходи в училищна среда:

- **Центрове-близнаци-1 (ТС1)**, които имат опит в предишни подобни проекти и са готови да започнат собствени инициативи в съответствие с идеите на проекта *Fibonacci*. Те ще си партнират с отправен център, за да постигнат възможно най-доброто научно осигуряване.
- **Центрове-близнаци-2 (ТС2)**, които нямат предишен опит в подобни проекти, но са силно заинтересовани от прилагане на идеите на проекта *Fibonacci*.

В края на проекта схемата на разпространение ще използва 24 отправни центрове (12 стари и 12 нови – бивши ТС1) за да организира нова група от **24 центъра-близнаци-3**. По този начин разпространителната схема отразява основната стратегия на проекта и оправдава напълно името му.

4. Заключение. Първите впечатления на членовете на българския екип по проекта *InnoMathEd* са, че участниците са мотивирани да изпробват в клас предложените на семинара учебни среди и да участват със собствени приноси в обогатяването на базата от дидактически сценарии.

По време на разискванията (не само в предвиденото за целта официално време) се откриха като най-важни въпросите: *Каква компютърна среда да използваме в клас и до каква степен?* Самите участници стигнаха до извода, че няма еднозначен отговор – определящите фактори са възрастта на учениците, тяхната математическа и информатична култура. Във всеки случай, най-важно е естеството на математи-

ческите задачи, които се решават и поставят, а що се отнася до софтуера – не името му, а стилът, в който се използва, е решаващ.

Макар проектът *Fibonacci* да е в самото начало, може да се види общата цел на двата проекта – да се дадат на учениците среди, в които те да могат да експериментират със свои идеи и хрумвания. Сами да откриват знанието. А когато човек открие някакъв факт, някакъв феномен, това става част от неговите трайни знания. Такъв стил на учене е в хармония със схващането, че *училището не е само подготовка за живота, то е самият живот.*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Facing The Challenge. The Lisbon strategy for growth and employment. Report from the High Level Group chaired by Wim Kok.
http://ec.europa.eu/growthandjobs/pdf/kok_report_en.pdf
- [2] Green paper: Promoting the learning mobility of young people.
<http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=COM:2009:0329:FIN:EN:PDF>
- [3] M. ROCARD. http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf, 2007.
- [4] TIMSS 2007 Results. <http://nces.ed.gov/timss/results07.asp>
- [5] Е. СТЕФАНОВА, Н. НИКОЛОВА, Е. КОВАЧЕВА, П. БОЙЧЕВ, Е. СЕНДОВА. Откривателството като част от преподаването в контекста на ИТ. *Математика и образованието по математика*, **38** (2009) 319–328.
- [6] Е. SENDOVA, N. NIKOLOVA, E. STEFANOVA, P. BOYTCHEV, E. KOVATCHEVA. Harnessing ICT for building a creativity-based society, 27-28 November 2009, Rome. In: Proceeding “ICT Skills, Education and Certification” of IT Star workshop, 2009, (in print).
- [7] T. BIANCO. Quality Standards for Learning Environments – an Overview.
http://www.imb-uni-augsburg.de/files/Arbeitsbericht_23.pdf
- [8] GEONExT. <http://geonext.uni-bayreuth.de/>
- [9] GeoGebra. <http://www.geogebra.org/cms/>
- [10] Elica. <http://www.elica.net/site/index.html>
- [11] Y. KAFAI, M. RESNICK eds Constructionism in Practice: Designing, Thinking, and Learning in a Digital World. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1996.
- [12] L. HEALY, C. HOYLES, J.-M. LABORDE. Teaching and Learning Dynamic Geometry, Editorial in the special issue on the subject in the IJCMML, vol. **6**, No. 3, 2001.
- [13] InnoMathEd – Progress Report, http://www.math.uni-augsburg.de/prof/dida/innomath/downloads/documents/2008_3348_PR_InnoMathEd.pdf
- [14] Първи семинар за обучение на учители, 4–5 септември 2009 г. – дидактически сценарии. <http://www.math.bas.bg/~omi/InnoMathEd.php>

Петър Кендеров
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: kenderovp@cc.bas.bg

**INNOVATIONS IN MATHEMATICS EDUCATION: EUROPEAN
PROJECTS *InnoMathEd* AND *Fibonacci***

Petar Kenderov

The paper considers the participation of the Institute of Mathematics and Informatics at the Bulgarian Academy of Sciences, into two European projects, *InnoMathEd* and *Fibonacci*. Both projects address substantial innovations in mathematics education and their dissemination on European level. Inquiry based learning is the central focus of the two projects. A special emphasis is paid on the outcomes of the projects in terms of didactic concepts, pedagogical methodologies and innovative learning environments aimed at pupils' active, self-responsible and exploratory learning.