

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2010
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2010
*Proceedings of the Thirty Ninth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Albena, April 6–10, 2010*

**ПРОБЛЕМИ В ОБУЧЕНИЕТО НА УЧИТЕЛИТЕ ПО
МАТЕМАТИКА***

Кирил Банков

През последните години се забелязва засилен интерес към въпроса какви знания трябва да имат учителите по математика, за да могат успешно да преподават този предмет. Въпросът е теоретически сложен и до сега не е изяснен. Някои широко мащабни оценъчно-диагностични изследвания хвърлят известна светлина над проблема. Този доклад представя някои резултати от международно изследване в тази област и дискутира подготовката на учителите по математика в България в този контекст.

Увод. С всяко появяване на данни от изследване на знанията на учениците по математика нараства безпокойството от лошата математическата подготовка на българските ученици. Резултатите от TIMSS¹ ([2]) показват непрекъснат спад на ученическите постижения по математика в VIII клас в България. Подобни резултати се отчитат на националните проверки в края на учебната година, на изпити по математика за прием в профилирани училища след завършен VII клас, както и на кандидат-студентските изпити. Вече не е тайна, че образованието в България, и в частност обучението по математика, е в дълбока криза.

Подобни безпокойства има и в други държави. Причините за спада на ученическите постижения може да са различни в различните места по света, но е без съмнение, че една сериозна причина е неадекватна подготовка на учителите по математика.

През последните години световната научна общност проявява засилен интерес към знанията, които трябва да имат учителите по математика, за да могат успешно да преподават този предмет. Правят се много теоретични и емпирични изследвания. Оказва се, че въпросът какви математически знания са необходими за преподаване на математиката е твърде сложен и до сега не е изяснен.

Един от начините да се анализира информация по този въпрос е да се организират широко мащабни оценъчно-диагностични изследвания в областта на подготовката на учители по математика, както и за оценка на знанията на действащи учители по математика. Такива изследвания хвърлят светлина на въпроси като:

- Какви знания се дават на бъдещите учители по математика?

*Тази работа е частично спонсорирана от фонд "Научни изследвания" на СУ "Св. Кл. Охридски".

¹TIMSS е международно изследване на постиженията на учениците от VIII клас по математика и природни науки, което се провежда на всеки 4 години. България участва в него от самото му начало през 1995 г.

- Какви са различията в това отношение между отделните държави?
 - Какви знания имат действащите учители по математика?
 - Какви възможности за обучение имат бъдещите учители по математика?
 - Какви възможности за допълнителна квалификация имат действащите учители по математика?
 - Какво е съдържанието на програмите и курсовете за подготовка и квалификация на учители по математика?
- и др.

Провеждането на такива изследвания е сравнително нова дейност. Въпреки че в национален мащаб подобни изследвания са правени ([5] и [6]), единици са международните такива – на автора са известни MT21 (Mathematics Teaching in the 21st Century), TEDS-M (Teacher Education and Development Study in Mathematics), TALIS (Teaching and Learning International Survey), от които първите две r;dj pdf подготовка на учители по математика, а последното – на действащи учители.

Основната информация за дози доклад са някои резултати от изследването MT21 ([3], [4], [8]), както и данни от TEDS-M.

Описание на изследването MT21. Изследването MT21 (“Учителите по математика в 21-ви век”) се фокусира върху подготовката на учители по математика за прогимназиалната степен на средното училище. В изследването участват 6 държави: България, Германия, Корея, Мексико, САЩ и Тайван.

Основните цели на MT21 са:

- Да разработи основни методи за изследване на подготовката на учители по математика.
- Да изпробва (апробира) тези методи.
- Да разработи и апробира инструментариум за изследване.
- Да потърси начини за преодоляване на технологични проблеми в подобен род изследвания.

Основното събиране на данни за MT21 стана през март–април 2006 г. Извадката за изследването е целева (purposeful). Всяка държава избра няколко институции, които подготвят учители по математика за средното училище, и в тях изследва всички студенти, които са в първата и последната си година на обучение.

Таблица 1 представя големината на извадката от институти и бъдещи учители по математика за всяка от участващите държави.

Извадката дава възможност (в известен смисъл) да се изследва “какво са научили студентите за престоя си в институцията, която ги подготвя за учители”. Последното е поставено в кавички, защото правилният начин да се отговори на този въпрос е като се изследва една и съща група студенти, когато те са в началото на обучението си и същата група, когато те са в края на обучението си. Както става ясно, ситуацията на MT21 не е точно такава, но все пак може да се получи някаква представа за онова, което институцията дава на студентите за времето на престоя им в нея.

Както е известно, в България подготовката на учители по математика за средното училище се извършва във факултетите по математика в някои от университетите. В основното изследване на България за MT21 участваха 3 такива университета с общо 78 студенти от първи курс и 83 студенти от четвърти курс. В момента на изследването в тези три университета се подготвяха общо над 50% от завършва-

Таблица 1. Големина на извадката за MT21

Държава	Брой институти	Брой бъдещи учители
България	3	161
Германия	Първи – 4*; Втори – 2*	848
Корея	4	210
Мексико	6	358
САЩ	12	382
Тайван	5	668
Общо	34	2627

* В Германия обучението на учители става в две институции. Най-напред те се обучават по съответния предмет (бакалавърска степен по математика) в университет (“първи” институт) и след това посъпват във (“втори”) институт за обучение на учители (обикновено 2 години).

щите специалността учител по математика (и информатика) за средното училище в страната. Броят на изследваните завършващи студенти (83) беше около 40% от завършващите за страната.

Какво учат бъдещите учители по математика? В основата на изследването MT21 е разбирането, че знанията на бъдещите учители по математика трябва да се изграждат в три основни направления: *математика, дидактика на математиката и обща педагогика* ([9]). Всяко от тези направления, макар в различна степен и тежест, е застъпено в обучението на учители от всички държави, участващи в MT21 и в TEDS-M. Таблица 2 показва средния брой *астрономически* часа, в които се изучават съответните направления в отделните държави. Данните са от учебната година 2005–2006, когато е проведено изследването.

Таблица 2. Среден брой астрономически часа, в които се изучават съответните направления в обучението на учители.

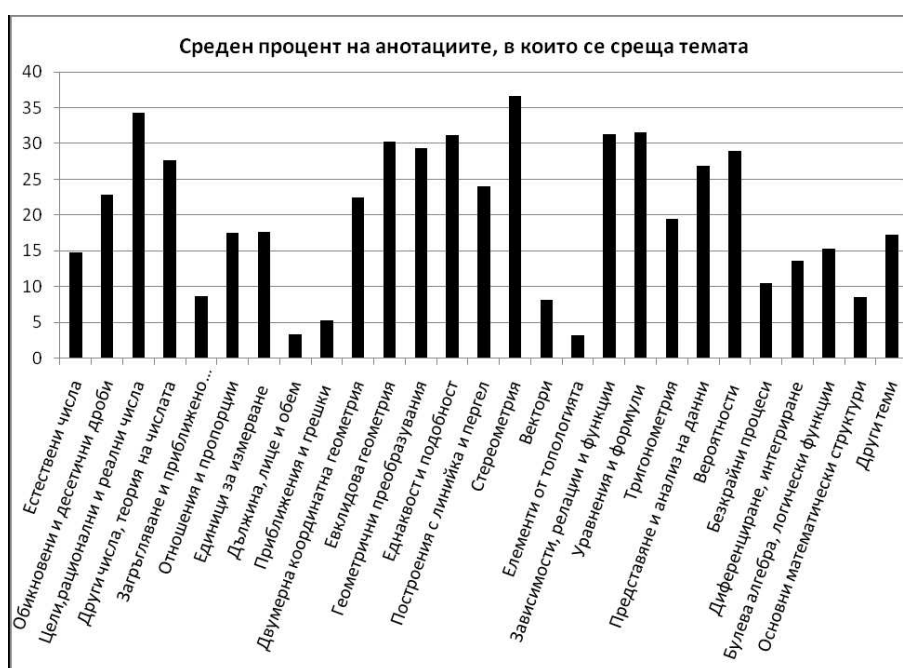
	Математика	Дидактика на математиката	Обща педагогика	Втора специализация	Друго	Общо часове
България	1037	77	98	483	116	1811
Германия	588	234	516	822		2160
Корея	741	53	210		722	1726
Мексико	896*		2688			3584
САЩ	518	114	505	139	471	1747
Тайван	1286	165	225		634	2310

* Тук са включени и часовете по дидактика на математиката.

Две неща правят впечатление за България от тази таблица. Първо, сравнително големият брой часове, предвиден за изучаване на математика (на второ място след Тайван, която е сред държавите с най-високи постижения по математика в TIMSS). Второ, изключително малкият брой часове по обща педагогика. Последното наблюдение се отнася в известна степен и за часовете по дидактика на математиката.

Допълнение към тази картина дава едно задълбочено изследване на учебните

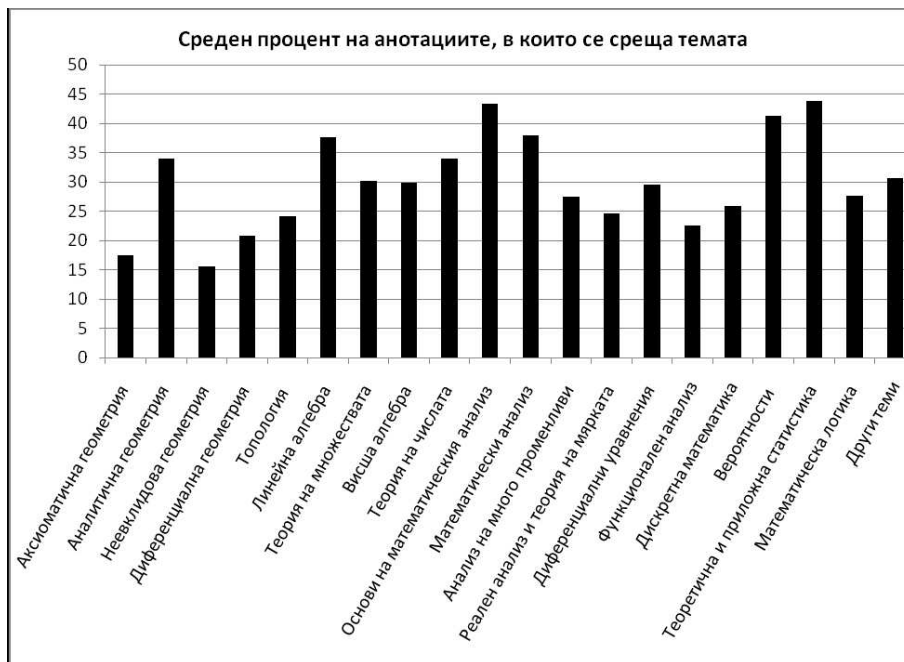
планове и преподавателските анотации на курсовете за подготовка на учители по математика, направено от Maria-Teresa Tatto и Кирил Банков (не е публикувано до момента) в рамките на изследването TEDS-M. В него се предполага, че е важно да се получи информация за обучението на бъдещите учители по така наречената “училищна математика”, т.е. математиката, която те би трябвало да преподават в училище. Затова, резултатите са систематизирани в четири направления – училищна математика, математика (включва се математика, която обикновено е над нивото на тази, изучавана в средното училище, и е типична за университетите), дидактика на математиката и обща педагогика. Диаграмите на фигури 1 до 4 представят средния процент на преподавателските анотации, в които се среща съответната тематика. Данните са от 8 държави (общо 264 изследвани анотации), участвали в TEDS-M.



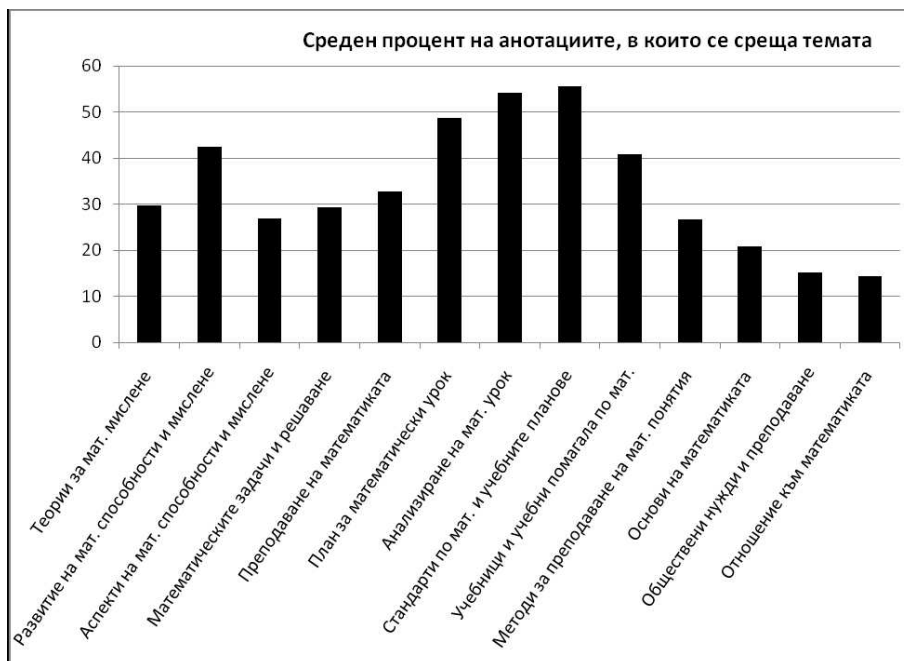
Фиг. 1. Училищна математика

Измерване на знанията на бъдещите учители по математика. Това е едно от интелектуалните предизвикателства на MT21 и TEDS-M. Тези първи изследвания в международен мащаб се сблъскаха с всички нерешени проблеми, свързани с измерване на знанията на възрастни хора в една много разнообразна по съдържание и когнитивна структура среда.

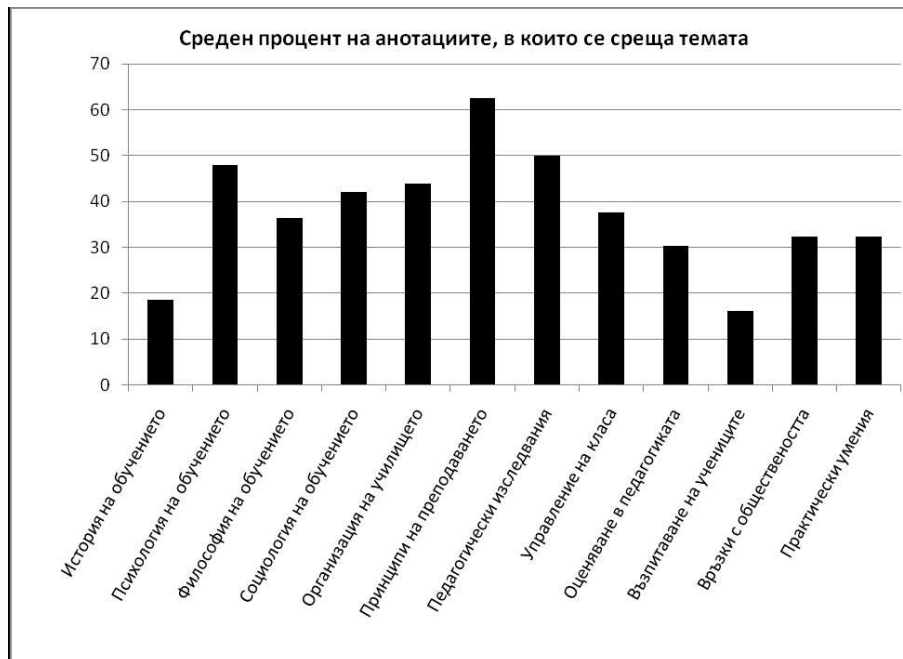
За измерване на знанията на бъдещите учители по математика трябва да се конструират три основни скали – по една за всяко от направленията математика, дидактика на математиката и обща педагогика. Тук ще разгледаме резултати, които са свързани само със **скалите по математика и дидактика на математиката** и няма да бъде описана скалата по обща педагогика.



Фиг. 2. Математика



Фиг. 3. Дидактика на математиката



Фиг. 4. Обща педагогика

За класификация на задачите по математика е използвана следната структура: Алгебра, Данни и вероятности, Функции, Геометрия, Числа. Това означава, че по математика са конструирани 5 под-скали – по една за всяка от изброените области.

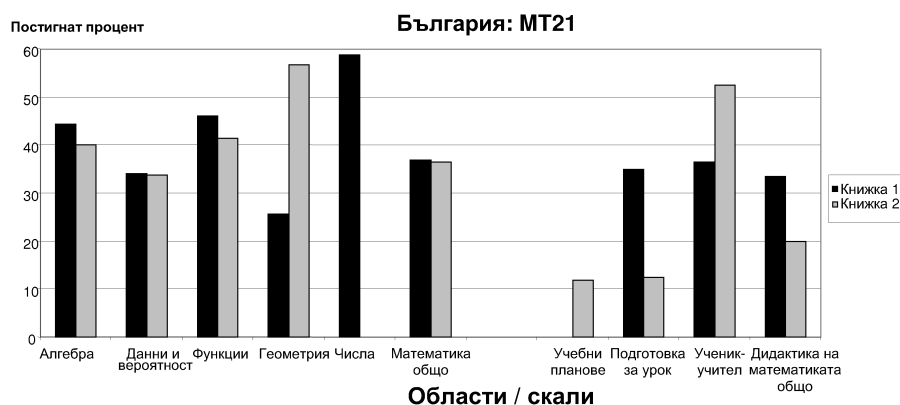
За класификация на задачите по дидактика на математиката е използвана следната структура: Знания за учебните планове, Знания за преподаване на математиката, Контакт “ученик-учител”. Това означава, че по дидактика на математиката са конструирани 3 под-скали – по една за всяка от тези области.

Съдържанието на тези области по дидактика на математиката може би се нуждае от допълнително обяснение. **Знания за учебните планове** съдържа знания за целите на обучението, определяне на основните идеи в учебните планове и разбиране на основните връзки в тях. **Знания за преподаване на математиката** съдържа избор на подходящи материали и дейности за обучение, определяне на различни подходи за обучение по определени теми от учебните планове, предвиждане на евентуални ученически отговори, включително и неправилно разбиране на материала и типични грешки (т.е. това е дейността на учителя, свързана с подготовката му за всеки урок). **Контакт “ученик-учител”** съдържа обяснения на понятия и процедури, анализиране на ученически въпроси и отговори, осигуряване на подходяща обратна връзка (т.е. това е дейността на учителя в класната стая).

Задачите за постижения по математика и по дидактика на математиката са класифицирани в 4 познавателни равнища: Познаване на понятия и използване на алгоритми, Решаване на задачи, Аргументиране и доказване, Моделиране на задачи от реалността.

За скалиране на резултатите беше използван метода на вероятностното моделиране ([1]), като бяха конструирани 2 тестови книжки.

Някои резултати от МТ21. Диаграмата от фигура 5 показва българското представяне по отделните книжки и по всяка от под-скалите в тях.



Фиг 5. Постижения на България по тестови книжки

Това, което прави впечатление от диаграмата е, че в книжка 1 няма под-скала “Числа”. Причината е, че в тази книжка няма задача от тази подобласт. По същата причина в книжка 2 няма под-скала “Знания за учебните планове”. Ясно се вижда, че представянето на българските бъдещи учители по математика в това изследване не е добро. Най-високият среден процент на постиженията по отделните области е под 60%.

Читателят вероятно предполага, че това се дължи на факта, че данните обединяват студенти от първи и четвърти курс и може би нещата ще изглеждат по-добри, ако резултатите се разделят по курсове. За съжаление това не е така. Таблицы 3 и 4 показват резултатите в скалите по математика и дидактика на математиката, разделени по курсове.

Таблица 3. Средна стойност на процент верни отговори по математика

	Книжка 1	Книжка 2
1-ви курс	41,73	41,58
4-ти курс	39,95	38,38

Таблица 4. Средна стойност на процент верни отговори по дидактика на математиката

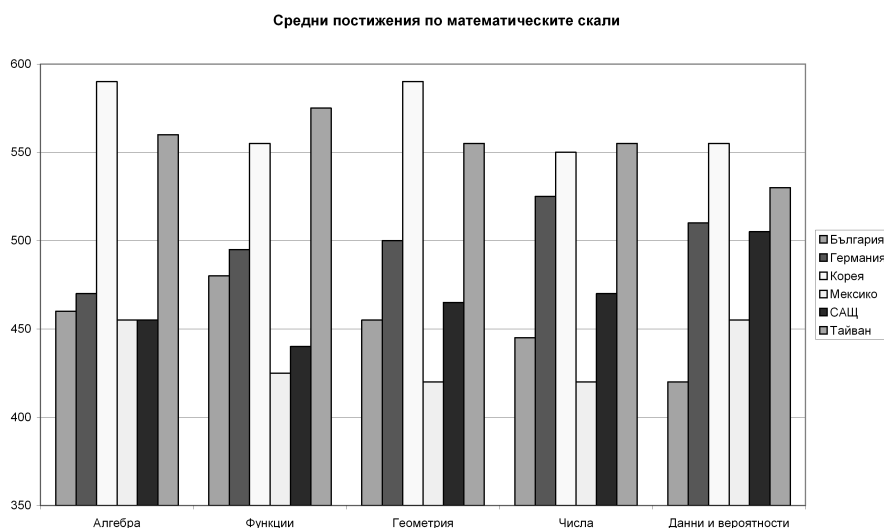
	Книжка 1	Книжка 2
1-ви курс	49,58	48,78
4-ти курс	59,66	66,79

Оказва се, че няма статистически значима разлика между резултатите на първокурсниците и тези на четвъртокурсниците. Този факт е изключително обезпокоителен

лен и повдига още много въпроси, чиито отговори са далеч извън рамките на този доклад; а именно:

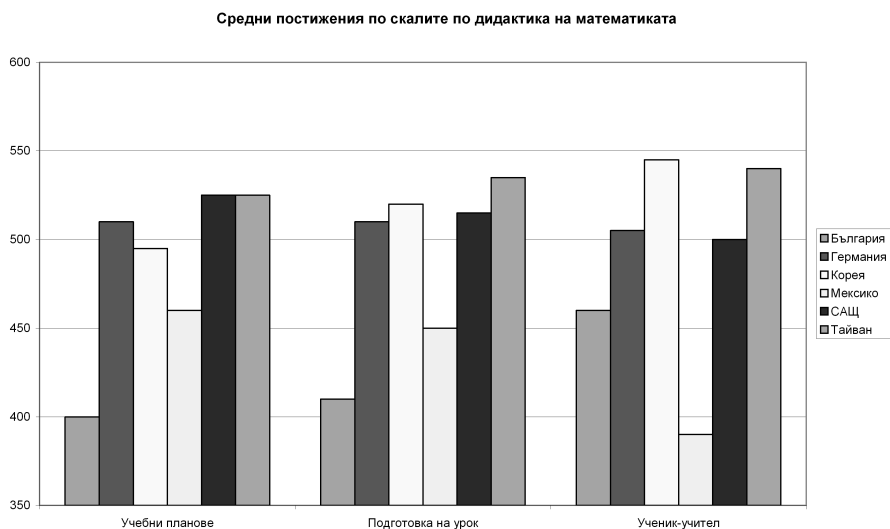
- Какво научават студентите – бъдещи учители в университетите?
 - Ако въобще научават нещо, какво е то, щом като не допринася за професионалната им подготовка?
 - Има ли нужда от обучението, което там им се предлага?
 - Как да бъдат обучавани те, така че наистина да има полза от обучението им за учители?
- и др.

Диаграмите на фигура 6 показват разпределението на средните стойности на постиженията на участващите държави по петте математически скали. Скалите са със средна стойност 500 и стандартно отклонение 100. Разликите в средните постижения на държавите са статистически значими ($p < 0,0001$). Очевидно е, че резултатите на Тайван и Корея са от една-четвърт до едно стандартно отклонение над останалите държави. Германските резултати са около средните. Мексико е доста под средното по всички скали. България и САЩ варират по постижения в различните скали.



Фиг. 6. Средни постижения по математика

Диаграмите на фигура 7 показват разпределението на средните стойности на постиженията на участващите държави по трите скали по дидактика на математиката. Скалите са със средна стойност 500 и стандартно отклонение 100. Както по математика, така и тук разликите в средните постижения на държавите са статистически значими ($p < 0,0001$). Но те са по-малки, отколкото в математическите скали. Подреждането на държавите малко се различава от онова, което наблюдавахме при математическите скали. Например, в скалата *Знания за учебните планове* най-добре са се представили Тайван и САЩ. В останалите две скали на дидактика на математиката подреждането е почти както в математическите скали. С тази



Фиг. 7. Средни постижения по дидактика на математиката

разлика, че САЩ е на доста по-добра позиция.

Българското представяне в областта дидактика на математиката е много слабо. България е на последно място в скалите *Знания за учебните планове* и *Знания за преподаване на математиката* и на предпоследно място по *Контакт “ученик-учител”*. Разликите с другите държави са големи. Очевидно е, че обучение по дидактика на математиката в програмите за подготовка на учители трябва съществено да се промени.

Два примера за представянето на българските участници. Ето една от задачите от скалата по математика (Алгебра), дадена в теста за постижения.

Пример 1. Ако $a > 0$, колко различни решения има уравнението $x^2 + x - a = 0$?

Отбележете едно квадратче

1

2

Безбройно много

Броят зависи от стойността на a

Резултатите на бъдещите български учители по математика са дадени в таблица 5.

Таблица 5. Резултати за България по Пример 1.

Отговор	Процент отговорили по отделните възможности	
	Всички	Завършващи (4-ти курс)
1	4,9	7,0
2	46,3*	41,9*
Безбройно много	2,4	0,0
Броят на реалните корени зависи от стойността на a	37,8	39,5
Без отговор	8,5	11,6

Изводите не са добри. Едва по-малко от половината (завършващи) бъдещи учители по математика могат да решат тази задача и повече от една-трета от тях считат, че броят на различните реални решения зависи от стойността на a .

Вторият пример е задача от скалата по дидактика на математиката (Знания за преподаване на математиката).

	Отбележете едно квадратче на всеки ред.		
	Адекватна	Неадекватна	Без отговор
Пример 2. Хората, изглежда, имат различни подходи към решаване на задачи с деление на дроби, като, например, задачата $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2} =$ За да направят това по-разбрано за децата, много учители се опитват да го свържат със ситуации от реалния свят или със задачи с думи. За всяка една от задачите с думи преценете поотделно дали тя е адекватна или не?			
Двама души имат една цяла торта и $\frac{3}{4}$ от другата торта. Как да разделят тортите по равно на всеки?	63.4	29.3*	7.3
Знаем, че лицето на един правоъгълник е равно на произведението от неговата дължина и широчината му. Нека лицето на една правоъгълна дъска е $1\frac{3}{4}$ кв.м., а нейната широчина е $\frac{1}{2}$ м. Каква е нейната дължина?.....	48.8*	40.2	11.0
Вчера карах велосипед от град А до град В. За $1\frac{3}{4}$ часа изминах $\frac{1}{2}$ от пътя си. За колко време съм изминал целия път?	47.6*	43.9	8.5
В кана имате едно цяло и три четвърти литра течност. Искате да я разделите наполовина, за да може всеки от вас да изпие половината.....	47.6	45.1*	7.3

В колонките от таблицата вместо квадратчета за отговор са поставени процентите на студентите, отговорили по съответните възможности за отговор. Правилните отговори са отбелязани със звездичка. Последната колонка показва процента на не-отговорилите за всяка от задачите. Представянето на бъдещите български учители по математика отново не е добро. Особено фрапиращо е то за първия ред, откъдето ясно личи, че се бърка действието деление на 2 с деление на $\frac{1}{2}$.

Някои изводи. Обучението на учители по математика в шестте участващи държави съдържа трите основни направления: математика, дидактика на математиката и педагогика. Тежестта на всяко от тях, обаче е различна. В Тайван, например, и трите направления са силно застъпени. България и Корея имат сравнително засилено изучаване на математика, но не чак толкова се набляга на дидактика на математиката и обща педагогика. Мексико е пример за държава с особено силно обучение по обща педагогика и дидактика, но много слабо застъпена математика. В Германия средно по сила е обучението по математика и слабо по дидактика и обща педагогика, докато в САЩ обучението по математика е слабо, а по дидактика и обща педагогика – средно по сила.

Заслужава внимание едно наблюдение, което е особено важно за България. Фактите показват, че нашите бъдещи учители по математика имат засилено обучение по математически дисциплини. Въпреки това, постиженията им по математическите скали на теста не са добри. В сравнение с Германия, например, бъдещите български учители изучават повече математика по време на обучението си. Но резултатите на Германия по математическите скали са по-добри (особено в областите Числа и Данни и вероятности) от тези на България.

Този факт повдига въпроса дали знанията по математика на учителите влияят върху това те да бъдат “добри учители”. Понятието “добър учител” е нещо комплексно и до сега в литературата никой не е успял да му даде определение. Изследвана е, обаче връзката между математическите знания на учителите и постиженията на техните ученици по математика ([7]). Резултатите изглеждат необичайни: изучаването на повече теоретична висша математика от учителите води по повишаване на постиженията по математика на съответните ученици в едва 10% от случаите. Нещо повече, ефектът е отрицателен в 8% от случаите.

Много изследователи са търсили обяснение на тези факти. Най-достоверното от тях изглежда е, че от значение е не само колко математика се изучава, но и как тя се преподава на бъдещите учители. С други думи, важно е бъдещите учители по математика да изучават математика, но нейното съдържание и начина на поднасяне трябва да е съобразен с особеностите на учителската професия. Образно казано, както има “математика за инженери” или “математика за икономисти”, така може да има и “математика за учители по математика”. Ръководно начало е при изучаване на математиката да се набляга на дидактическите принципи и идеи, да се прави връзка със знанията, които трябва да се поднесат на учениците в училище, с начина на преподаване, как съответните математически знания и идеи могат да се сведат по подходящ начин на ученици в определена възраст, как самите ученици възприемат математическите идеи, и т.н.

Подготовката на българските учители по математика става във факултетите по математика и информатика в университетите. Това има сериозни предимства, за-

щото на тях математика се преподава от професионални математици в количество, сравнимо с онова, което учат студентите в математическите специалности. Тази математика, обаче е високо теоретична и не е свързана с дейността на учителя.

Заслужава да се кажат и няколко думи за подготовката на бъдещите учители по математика в областта на дидактиката на математиката. Задачите, които измерват тази област в изследването MT21 поставят математически въпрос в подходяща дидактическа ситуация. Това е сериозен принос на изследването. Дидактическите знания са важни за учителя. Но, както в случая с математическите знания, и тук става дума не само за теоретични знания. В обучението на учители трябва да залегне нещо много по-близо до учителската практика – обсъждане на математически проблеми в подходящи дидактически ситуации. Така бъдещите учители по математика могат да получат знания и опит за адекватна реакция в реална учебна обстановка.

Заклучение. Изследването MT21 поставя начало на дискусия за подготовката на учители по математика. Оказва се, че въпросът е проблемен в международен мащаб и, както виждаме, проблемен е и за България. Мнението, че е достатъчно да научим учителите на “много математика”, очевидно е погрешно. Нито една от шестте държави в MT21 няма такава практика. Нужно е сериозно обучение още по дидактика на математиката и по обща педагогика със сериозна практическа насоченост. Очевидно е, че държави, чиито ученици показват високи резултати на международни изследвания по математика, като например Тайван и Корея, подготвят учителите си сериозно както по математика, така и по дидактика и педагогика, като наблягат на практическите страни на тази подготовка. Основният въпрос е не дали това е необходимо, а как да се постигне идеалният баланс между различните области в обучението на учители по математика.

REFERENCES

- [1] К. БАНКОВ. Вероятностно моделиране за измерване на ученическите постижения. *Математика и информатика*, **4**, 2002.
- [2] К. БАНКОВ. Подготвя ли българското училище математически грамотни хора? (Един урок от TIMSS-2003). *Математика и информатика*, **2**, 2006.
- [3] К. БАНКОВ. Ефективна ли е подготовката на учители по математика в България? *Математика и информатика*, **6**, 2007.
- [4] К. БАНКОВ. Сравнително изследване на подготовката на учители по математика в шест държави. *Математика и информатика*, **1**, 2008.
- [5] D. L. BALL, H. BASS. Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In: *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (Ed. J. Boaler), Westport, CT: Ablex, 2000, 83–104.
- [6] D. BALL, S. T. LUBIENSKI, D. S. MEWBORN. Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teacher’s mathematical knowledge. In: *Handbook of research on teaching* (Ed. V. Richardson), 4th Ed., Washington, DC: American Educational Research Association, 2001.
- [7] E. G. BEGLE. *Critical Variables in Mathematics Education: Findings from of a Survey from the Empirical Literature*. Washington D.C. Mathematical Association of America and National Council of Teachers of Mathematics, 1997.
- [8] W. SCHMIDT et al. *The Preparation Gap: Teacher Education for Middle School Mathematics in Six Countries (MT21 Report)*, MSU, 2007.

- [9] L. SHULMAN. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, **57** (1987) No 1, 1–22.

Кирил Банков
ФМИ – СУ “Св. Кл. Охридски”
Бул. Дж. Баучер, № 5
1164 София
e-mail: kbankov@fmi.uni-sofia.bg

PROBLEMS IN MATHEMATICS TEACHER PREPARATION

Kiril Bankov

What mathematics do teachers need to know to teach effectively? This question has been of great importance in the studies of mathematics teacher preparation for the last decade. Many theoretical papers have been published but there is not a common understanding yet. Large scale studies have also contributed to the issue. This paper presents some results of an international study in this area and discusses problems in preparation of mathematics teachers in Bulgaria.