МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2010
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2010
Proceedings of the Thirty Ninth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians
Albena, April 6–10, 2010

ОПТИМИЗАЦИЯ НА УЧИТЕЛСКИЯ СЪСТАВ В УЧИЛИЩЕ

Силвия Баева

В системата на МОМН се говори за оптимизиране на училищната мрежа, като това оптимизиране да се извърши в различни направления и да е обвързано със законовите разпоредби. Важен аспект в оптимизацията на училищната мрежа е намаляване на разходите и увеличаване на общата ефективност във всяко едно учебно заведение. Този аспект ще формулираме като задача на многокритериалното вземане на решения, като чрез подходящо изграждане на критерии и методи може да се трансформира до задача на еднокритериалната оптимизация. Тази задача се разделя на два етапа: I етап – определяне на минимален брой паралелки в едно учебно заведение при определени законови разпоредби за числеността на всяка една от тях [1]; II етап – назначаване на минимален брой учители и достигане на максимална ефективност на преподаване и придобиване на знания и умения у учениците също при определени законови разпоредби за годишните нормативи на учителите по учебните предмети, брой часове по даден учебен предмет в определен клас и заплати на учителите [1]. Постигането на максимална обща ефективност е приоритет във всички училища.

Увод. M. A. Huselid, S. E. Jackson, R. S. Schuler [6], [12], J. B. Arthur [3], M. A. Huselid, B. E. Becker [5], N. K. Kwak, C. Lee [7] и др.[2], [8], в по-голямата част от литературата в областта на човешките ресурси коментират методите за оценяване на качествата на служители, а тук акцентът е върху математическите страни на използването на вече получените данни. В [10] и [11] са разгледани подобни задачи в областта на колективните спортни игри и съкращаване на персонал във фирма.

Оптимизация на учителския състав. Всяка учителска длъжност в училище изисква определени качества и квалификации, всяко качество – определени умения и знания, свързани с някои законови разпоредби [1]. Под оптимален учителски състав ще разбираме този, който има най-голяма обща ефективност при минимални разходи за заплати на учителите. Изборът на оптимална алтернатива (оптимален учителски състав) е свързана с изграждане на съответни критерии, по които да се оценява полезността (ефективността) на всеки учител за всяка длъжност. След което да се изгради нов критерий, който да използва тези ефективности и чрез който да се избере оптимално решение. Решението не е единствено и зависи от лицето, вземащо решение. Необходим е експерт в съответната област, запознат с проблема, за да зададе параметрите, които участват и да изгради правилно критериите [1].

В системата на средното образование имаме три курса на обучение: начален, прогимназиален и гимназиален.

Нека броят на паралелките е C, а учителите са S на брой, $C \leq S$.

В начален курс броят на назначените учители трябва да е равен на броя на паралелките [1]. В прогимназиален и гимназиален курс броят на учителите, които трябва да се назначат, се определя от годишния норматив за учебни часове по учебен предмет в определен клас и брой паралелки в съответен клас според Наредба на МОМН [1].

Нека е дадена матрицата $P = \{p_{mk}\}_{M\times K}$, където p_{mk} е броят на учебните часове по годишен норматив в m-тия клас по k-тия учебен предмет, $m = 1, 2, \ldots, M$;, $k = 1, 2, \ldots, K$ [1].

Нека броят на паралелките по класове в прогимназиален и гимназиален курс е:

1-*ви клас:* x_1 *на брой паралелки* (*т.е.* 5-*ти клас*)*;*

2-*ри клас:* x_2 *на брой паралелки* (*т.е.* 6-*ти клас*)*;*

...

M-*ти клас:* x_M *на брой паралелки* (*т.е.* $(M + 4)$-*ти клас*).

За да определим общия брой на часовете според годишния норматив по учебни предмети за всички паралелки, умножаваме всеки ред на матрицата съответно с броя паралелки за съответния клас x_m, $m = 1, 2, \ldots, M$. Образуваме:

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} x_1.p_{11} & x_1.p_{12} & \ldots & x_1.p_{1K} \\ x_2.p_{21} & x_2.p_{22} & \ldots & x_2.p_{2K} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_M.p_{M1} & x_M.p_{M2} & \ldots & x_M.p_{MK} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1K} \\ P_{21} & P_{22} & \ldots & P_{2K} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{M1} & P_{M2} & \ldots & P_{MK} \end{pmatrix},$$

където P_{mk} е общият брой учебни часове в m-тия клас по k-тия учебен предмет, $m = 1, 2, \ldots, M$; $k = 1, 2, \ldots, K$.

Тогава общият брой учебни часове по учебни предмети е:

$$P_1\colon \sum_{m=1}^{M} x_m p_{m1} = \sum_{m=1}^{M} P_{m1},\ P_2\colon \sum_{m=1}^{M} x_m p_{m2} = \sum_{m=1}^{M} P_{m2},\ \ldots,\ P_K\colon \sum_{m=1}^{M} x_m p_{mK} = \sum_{m=1}^{M} P_{mK}.$$

От Наредба на МОМН [1] вземаме годишният брой часове по норматив по всеки един учебен предмет: За $P_1 : N_1$; за $P_2 : N_2$; ...; за $P_K : N_K$.

Определяме броят на длъжностите по следният начин:

$$P_1 : \mathrm{int}\left[\sum_{m=1}^{M} P_{m1}/N_1\right] = d_1, \quad P_2 : \mathrm{int}\left[\sum_{m=1}^{M} P_{m2}/N_2\right] = d_2, \quad \ldots,$$

$$P_K : \mathrm{int}\left[\sum_{m=1}^{M} P_{mK}/N_K\right] = d_K$$

Остават под годишният норматив съответно следният брой часове:

$$\text{За } P_1 : o_1; \quad \text{за } P_2 : o_2; \quad \ldots, \quad \text{за } P_K : o_K.$$

Според Наредба на МОМН [1] е по-удачно да направим следното:

- Ако $o_k \leq 1/3$ от годишният норматив на учител по k-тия учебен предмет, икономически по-изгодно е тези $_k$ часове да останат като лекторски часове, $k = 1, 2, \ldots, K$;

- Ако $o_k > 1/3$ от годишният норматив на учител по k-тия учебен предмет, икономически по-изгодно е тези $_K$ часове да образуват "половин" длъжност, $k = 1, 2, \dots, K$, като обединим в една длъжност – две "половини" длъжности.

След тази проверка определяме "половините" длъжности. Нека те са O_1, O_2, ..., O_L, т.е. те са L на брой и отговарят на някои от длъжностите P_k, $k = 1, 2, \dots, K$.

Нека лицето-експерт е задало следната теглова матрица $U = \{u_{sr}\}_{S\times R}$, съобразена с длъжностната характеристика за дадена позиция според Наредба на МОМН [1]:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1R} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2R} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{S1} & u_{S2} & \dots & u_{SR} \end{pmatrix},$$

(2)
$$u_{sr} = \begin{cases} 3, & \text{"магистър по } r\text{-тия уч. предмет"} \\ 2, & \text{"бакалавър по } r\text{-тия уч. предмет"} \\ 1, & \text{"специалист по } r\text{-тия уч. предмет"} \\ 0, & \text{"не е учител по } r\text{-тия уч. предмет"} \end{cases},$$

$$s = 1, 2, \dots, S, \quad r = 1, 2, \dots, R,$$

където u_{sr} е теглото на s-тия учител по r-тата длъжност, $s = 1, 2, \dots, S$; $r = 1, 2, \dots, R$.

Независима комисия (или лицето-експерт) определя конкретни критерии [1], чрез които да се оцени общата ефективност на всеки един учител – качествените характеристики се изразяват количествено. Получаваме матрицата $T = \{t_{sl}\}_{S\times L}$:

(3)
$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1L} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{S1} & t_{S2} & \dots & t_{SL} \end{pmatrix},$$

където t_{sl} са точките на s-тия учител по l-тия критерий, $s = 1, 2, \dots, S$; $l = 1, 2, \dots, L$.

Общия брой точки според критериите, за всеки от учителите, означаваме по следния начин: за $y_1 : \sum_{l=1}^{L} t_{1l} = T_1$; за $y_2 : \sum_{l=1}^{L} t_{2l} = T_2$; ... за $y_S : \sum_{l=1}^{L} t_{Sl} = T_S$.

За да получим ефективността на всеки един учител за всяка длъжност, умножаваме всеки ред на матрицата U съответно с общият брой точки, получени от критериите, т.е. получаваме матрицата $\{q_{sr}\}_{S\times R}$:

(4)
$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1R} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2R} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{S1} & q_{S2} & \dots & q_{SR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1u_{11} & T_1u_{12} & \dots & T_1u_{1R} \\ T_2u_{21} & T_2u_{22} & \dots & T_2u_{2R} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_Su_{S1} & T_Su_{S2} & \dots & T_Su_{SR} \end{pmatrix},$$

където q_{sr} е ефективността на s-тия учител за r-тата длъжност, $s = 1, 2, \dots, S$; $r = 1, 2, \dots, R$.

Ще разгледаме два случая:

I случай: Нека L е четно число. Тогава на $L/2$ на брой длъжности ще назначим $L/2$ на брой учители измежду всичките S на брой така,че общата ефективност на тези $L/2$ на брой учители за тези $L/2$ на брой длъжности да е възможно най-голяма. Така образуваме следната матрица $Q = \{Q_{sl}\}_{S\times L}$:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1L} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{S1} & Q_{S2} & \dots & Q_{SL} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

където Q_{sl} е ефективността на s-тия учител за l-тата длъжност (учебен предмет), $s = 1, 2, \dots, S$; $l = 1, 2, \dots, L$.

Решаваме следната задача – *задача за назначенията* [9]:

$$\max G_1(Y) = \sum_{s=1}^{S}\sum_{l=1}^{L} Q_{sl}.y_{sl}$$

при ограничения:

$$\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{S} y_{sl} = 1, \quad l = 1, 2, \dots, L, \\ &\sum_{l=1}^{L} y_{sl} \le 1, \quad s = 1, 2, \dots, S, \\ &y_{sl} = \{0, 1\}, \quad s = 1, 2, \dots, S, \quad l = 1, 2, \dots, L, \end{aligned} \tag{6}$$

където Q_{sl} е ефективността на s-тия учител за l-тата длъжност, $s = 1, 2, \dots, S$; $l = 1, 2, \dots, L$.

Целевата функция $G_1(Y)$ представя общата ефективност на учителския състав, затова търсим нейния максимум, а y_{sl} е “отношението” на s-тия учител към l-тата длъжност. Ако той заема длъжността, то $y_{sl} = 1$, в противен случай – $y_{sl} = 0$.

Решаваме задачата и намираме най-голямата обща ефективност и съответните назначения. Част от тези S на брой учители ще заемат “половините” L на брой длъжности.

Построяваме $W = \{W_{sl}\}_{S\times L}$ от нули и единици, която е решение на задача (6):

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \dots & W_{1L} \\ W_{21} & W_{22} & \dots & W_{2L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{S1} & W_{S2} & \dots & W_{SL} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Връщаме се отново към матрицата Q, като на местата на единиците от матрицата W поставяме нули в Q, и получаваме нова матрица $Q_1 = \{Q_{1sl}\}_{S\times L}$ от ефективността на всички учители, но с нули на позициите, които вече са “заети”:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} Q_{111} & Q_{112} & \dots & Q_{11L} \\ Q_{121} & Q_{122} & \dots & Q_{12L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{1S1} & Q_{1S2} & \dots & Q_{1SL} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Решаваме следната задача – *задача за назначенията* [9]:

$$(9)\qquad \begin{aligned} &\max G_2(Y) = \sum_{s=1}^{S}\sum_{l=1}^{L} Q_{1sl}.y_{sl} \\ &\text{при ограничения:} \\ &\sum_{s=1}^{S} y_{sl} = 1, \quad l = 1,2,\dots,L, \\ &\sum_{l=1}^{L} y_{sl} \le 1, \quad s = 1,2,\dots,S, \\ &y_{sl} = \{0,1\}, \quad s = 1,2,\dots,S, \quad l = 1,2,\dots,L. \end{aligned}$$

Построяваме $W_1 = \{W_{1sl}\}_{S\times L}$ от нули и единици, която е решение на задача (9):

$$(10)\qquad W_1 = \begin{pmatrix} W_{111} & W_{112} & \dots & W_{11L} \\ W_{121} & W_{122} & \dots & W_{12L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{1S1} & W_{1S2} & \dots & W_{1SL} \end{pmatrix}.$$

Събираме матриците W и W_1 и получаваме нова матрица $W_2 = \{W_{2sl}\}_{S\times L}$:

$$(11)\qquad W_2 = \begin{pmatrix} W_{211} & W_{212} & \dots & W_{21L} \\ W_{221} & W_{222} & \dots & W_{22L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{2S1} & W_{2S2} & \dots & W_{2SL} \end{pmatrix}.$$

Образуваме: $\sum_{l=1}^{L} WW_{21l}; \sum_{l=1}^{L} WW_{22l}; \dots; \sum_{l=1}^{L} WW_{2Sl}$. Ако $\sum_{l=1}^{L} W_{2sl} = 2, s = 1,2,\dots,S$, то s-тия учител заема съответната длъжност, образувана от две "половини" длъжности.

Нека s_1 на брой учители заемат тези s_1 на брой длъжности, образувани от две "половини" длъжности, $s_1 \le O_L/2$.

За останалите $s - s_1 = s_2$ на брой учители и s_2, $s_2 \le O_L/2$, на брой длъжности правим същата процедура, както е описана по-горе. И така до изчерпване на "половините" длъжности.

Нека на тези $L/2$ длъжности, образувани от две "половини" длъжности, са назначени $L/2$ на брой учители, $L/2 < S$.

II случай: Нека L е нечетно число. Тогава на $\dfrac{L-1}{2} + 1$ на брой длъжности ще назначим $\dfrac{L-1}{2} + 1$ на брой учители измежду всичките S на брой така, че общата ефективност на тези учители за тези длъжности да е възможно най-голяма.

Процедурите по заемане на "половини" длъжности в една са същите както в *I случай*, плюс една, която остава само "половина".

За останалите $S - L/2$ или $S - \dfrac{L-1}{2} - 1$ на брой учители имаме съответната ефективност за останалите $K - L/2$ или $K - \dfrac{L-1}{2} - 1$ на брой длъжности. Нека броят на останалите учители е H, а броят на останалите длъжности е V, $V \le H$.

Така получаваме матрицата $\Omega = \{\omega_{hv}\}_{H\times V}$:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1V} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2V} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{H1} & \omega_{H2} & \dots & \omega_{HV} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

където ω_{hv} е ефективността на h-тия учител за v-тата длъжност, $h = 1, 2, \dots, H$;, $v = 1, 2, \dots, V$.

За образуване на оптимален учителски състав трябва да се направят две неща – да се реши кои учители да попаднат в него и кой каква длъжност да заеме. За учителският състав вземаме H на брой учители, които имат най-голяма обща полезност (ефективност), след което използваме ефективността им за отделните длъжности и задачата за разпределяне на длъжностите се свежда до еднокритериална линейна задача – *задача за назначенията* [9]:

$$\max F(Y) = \sum_{h=1}^{H}\sum_{v=1}^{V} \omega_{hv}.y_{hv}$$

при ограничения:

$$\begin{aligned} &\sum_{h=1}^{H} y_{hv} = 1, \quad v = 1, 2, \dots, V, \\ &\sum_{v=1}^{V} y_{hv} \le 1, \quad h = 1, 2, \dots, H, \\ &y_{hv} = \{0, 1\}, \quad h = 1, 2, \dots, H, \quad v = 1, 2, \dots, V. \end{aligned} \tag{13}$$

Целевата функция $F(Y)$ представя общата ефективност на учителския състав, затова търсим нейния максимум, а y_{hv} – "отношението" на h-тия учител към v-тата длъжност. Ако той заема длъжността, то $y_{hv} = 1$, в противен случай – $y_{hv} = 0$.

Решаваме задача (13) и намираме най-голямата обща ефективност и съответните назначения.

Решението на задачата за оптимизиране на учителския състав в училище включва обработка на данни от тестове, попълнени от учители, описание и работа по критериите за достигане на обща ефективност на учителите, съобразени с минималните разходи за заплати и решение на определени оптимизационни задачи – (6), (9), (13). При конкретно зададени данни тези задачи се решават с помощта на *MAPLE*, *LINGO* и *LINDO*.

Направен бе конкретен пример по предложената схема с условни данни за ОУ "Христо Смирненски" – гр. Нова Загора, в прогимназиален етап на обучение, при който се установи, че разходите за заплати на учителите се намалява с 12,5%, а общата ефективност на учителския състав се увеличава с 5,7%.

ЛИТЕРАТУРА

[1] http://minedu.com

[2] I. M. Stancu-Minasian. Stochastic Programming with Multiple Objective Function. D. Reidel Publishing Company, 1984.

[3] J. B. Arthur. Effects of human resource systems on manufacturing performance and turnover. *Academy of Management Journal*, **37** (1994), 670–687.
[4] J. McFarland. Coaching Pitchers. Leisure Campaign, Illinois, 1994.
[5] M. A. Huselid, B. E. Becker. Methodological issues in cross-sectional and panel estimates of the human resource-firm performance link. *Industrial Relations*, **35** (1996), 400–422.
[6] M. A. Huselid, S. E. Jackson, R. S. Schuler. Technical and strategic human resource management effectiveness as determinants of firm performance. *Academy of Management Journal*, **40** , No 1 (1997), 171–188.
[7] N. K. Kwak, Changwon Lee. A Linear Goal Programming Model for Human Resource Allocation in a Health-Care Organization. *Journal of Medical Systems*, **21**, No. 3 (1997).
[8] R. S. Schuler. Strategic human resource management: Linking people with the needs of the business. *Organizational Dynamics*, **21**, No 1(1992), 18–32.
[9] R. E. Burkard, E. Cela. Linear Assignment Problems and Extensions. *Handbook of Combinatorial Optimization*, vol. **4**, Kluwer Publishers, 1999.
[10] S. Baeva, L. Komarevska, C. Nedeva, L. Trenev. Multi-criterial Decision Making for Selection and Assignment of Sportsmen in Team-games. American Institute of Physics, `http://proceedings.aip.org/proceedings/cpcr.jsp`, p. 451–457, 2008.
[11] S. Baeva, D. Komarevska, C. Nedeva, T. Todorov. Optimization of the human resource efficiency in companies. `http://proceedings.aip.org`, American Institute of Physics, (in press).
[12] S. E. Jackson, R. S. Schuler. Understanding human resource management in the context of organization and theire environments. *Anna Rev. Psychol.*, **46** (1995), 237–264.

Силвия Баева
Технически Университет – София
ФПМИ, кат. Стохастика и оптимиране
бул. "Климент Охридски" 8
1000 София
e-mail: `sbaeva@tu-sofia.bg`

OPTIMIZATION OF THE TEACHER'S PERSONAL IN THE SCHOOL

Silvia Baeva

In the Ministry of Education and Science's system it has been talked about optimization of the school network; this optimization can be carried out in different directions and be supported by laws. An important aspect in the optimization of the school network is to reduce costs and increase overall efficiency in each school. We will formulate this aspect as a problem of the multi-criteria decisions making and by appropriate numbers of methods and criteria it can be transformed to the problem of uni-criterion optimization. This problem is separated into two stages: 1-th stage – determining the minimum number of classes in a school under certain statutory provisions for the size of each of them; 2-th stage – the appointment of a minimum number of teachers and achievement of maximal effectiveness of teaching and acquiring of knowledge and skills by students according to certain statutory provisions for teachers' annual norms of subjects and number of hours in a particular subject area and the salaries of teachers. The achievement of maximum overall efficiency is a priority in all schools.