МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2010
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2010
Proceedings of the Thirty Ninth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Albena, April 6–10, 2010

ЕДИН НАЧИН ЗА ПРЕГОВОР НА ФОРМУЛИТЕ ПО ТРИГОНОМЕТРИЯ В СРЕДНОТО УЧИЛИЩЕ

Климент Василев

Формулите по тригонометрия се дават под формата на задачи. Някои от тези задачи са решени, а другите са дадени с подходящо упътване. Този начин е подходящ за преговор в средното училище, подготовка за държавен зрелостен изпит и кандидат-студентски изпити по математика.

В самото начало въвеждаме дефинициите на тригонометричните функции $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ за $\varphi \in (-\pi; \pi]$.

а) $|\overrightarrow{OM}| = 1$,
$M_1 = \text{пр}_{Ox}M$,
$M_2 = \text{пр}_{Oy}M$,

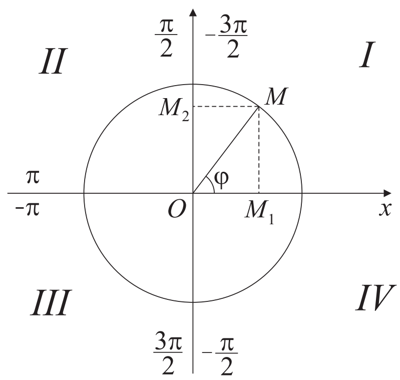
(1) $$\cos\varphi = \overline{OM_1},$$

(2) $$\sin\varphi = \overline{OM_2}.$$

Функциите $\operatorname{tg}\varphi$ и $\operatorname{cotg}\varphi$ се дефинират като:

(3) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

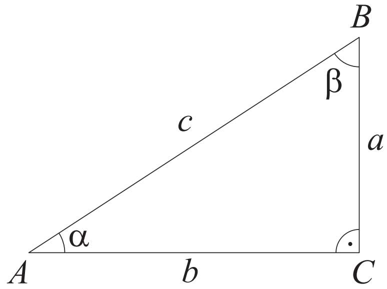
(4) $$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$



Черт. 1

б) като следствие от а) в правоъгълен триъгълник получаваме формулите:

$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\sin\beta = \dfrac{b}{c}$,
$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$, $\cos\beta = \dfrac{a}{c}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{b}{a}$,
$\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{b}{a}$, $\operatorname{cotg}\beta = \dfrac{a}{b}$.



Черт. 2

в) За някои често използвани стойности на аргумента пресмятаме значенията на функциите и ги нанасяме в таблица:

(5)

Градуси	0	30	45	60	90
Радиани	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	неопр.
cotg	неопр.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Полезно е да дадем и формулите за преобразуване на мерките на ъгъла от градуси в радиани. Ако x е мярката на ъгъла в радиани, а y е мярката на ъгъла в градуси, то:

$x = \frac{\pi}{180}y$ – преобразуване от градуси в радиани;

$y = \frac{180}{\pi}x$ – преобразуване от радиани в градуси.

г) Знаците на функциите също нанасяме в таблица:

Квадрант	I	II	III	IV
Градуси	(0, 90)	(90, 180)	(180, 270)	(270, 360)
Радиани	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tg	+	−	+	−
cotg	+	−	+	−

д) Използваме наготово доказаната формула

(6) $$\cos(\alpha - \beta) = cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

Следващите твърдения се дават като задачи:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Решение.

$1 = \cos 0 = \cos(\alpha - \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$
$\Longrightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

2. $\cos(-\beta) = \cos\beta$.

Упътване: Приложете (6) и (5) при $\alpha = 0$.

3. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\beta$.

Упътване: Приложете (6) и (5) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

4. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta$.

Решение. $\cos\beta=\cos\left[\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)\right]=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)\Longrightarrow\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta$.

5. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

Решение. $\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\dfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=$
$=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

6. $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$.

Решение. $\sin 0=\sin(\alpha-\alpha)=\sin\left[\alpha+(-\alpha)\right]=\sin\alpha\cos(-\alpha)+\cos\alpha\sin(-\alpha)=$
$\sin\alpha\cos\alpha+\sin(-\alpha)\cos\alpha=\cos\alpha\left[\sin\alpha+\sin(-\alpha)\right]=0$;
$(\cos\alpha=0)\ \cup(\sin\alpha+\sin(-\alpha)=0$; $\cos\alpha=0\Longrightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{2}\Longrightarrow\sin\dfrac{\pi}{2}=1$;
$\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$ (черт. 1) $\Longrightarrow\sin\dfrac{\pi}{2}+\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$
$\cos\alpha\neq 0\qquad\sin\alpha+\sin(-\alpha)=0\Longrightarrow\sin\alpha=-\sin(-\alpha)$

7. а) $\operatorname{tg}(-\beta)=-\operatorname{tg}\beta$;
б) $\operatorname{cotg}(-\beta)=-\operatorname{cotg}\beta$;
в) $\operatorname{tg}\beta\operatorname{cotg}\beta=1$.

Упътване: а) приложете (3), зад. 6, зад. 2 и (3); б) приложете (4), зад. 2, зад. 6 и (4); в) умножете почленно (3) и (4).

8. а) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)=\operatorname{cotg}\beta$;
б) $\operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)=\operatorname{tg}\beta$.

Упътване: а) приложете (3), зад. 4, зад. 3 и (4); б) приложете (4), зад. 3, зад. 4 и (3).

9. а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)=\cos\beta$;
б) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)=-\sin\beta$;
в) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)=-\operatorname{cotg}\beta$;
г) $\operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)=-\operatorname{tg}\beta$.

Упътване: Представете $\dfrac{\pi}{2}+\beta=\dfrac{\pi}{2}-(-\beta)$.

а) Приложете зад. 4 и зад. 2; б) Приложете зад. 3 и зад. 6; в) Приложете зад. 8а) и зад. 7б); г) Приложете зад. 8б) и зад. 7а).

10. а) $\sin(\pi-\beta)=\sin\beta$;
б) $\cos(\pi-\beta)=-\cos\beta$;
в) $\operatorname{tg}(\pi-\beta)=-\operatorname{tg}\beta$;
г) $\operatorname{cotg}(\pi-\beta)=-\operatorname{cotg}\beta$;

Упътване: Представете $\pi-\beta=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}-\beta$.

а) Приложете зад. 9а) и зад. 3; б) Приложете зад. 9б) и зад. 4; в) Приложете зад. 9в) и зад. 8б); г) Приложете зад. 9г) и зад. 8а).

11. а) $\sin(\pi+\beta)=-\sin\beta$;

б) $\cos(\pi+\beta) = -\cos\beta$;
в) $\text{tg}\,(\pi+\beta) = \text{tg}\,\beta$;
г) $\text{cotg}\,(\pi+\beta) = \text{cotg}\,\beta$;
Упътване: Представете $\pi+\beta = \pi-(-\beta)$.

а) Приложете зад. 10а) и зад. 6; б) Приложете зад. 10б) и зад. 2; в) Приложете зад. 10в) и зад. 7а); г) Приложете зад. 10г) и зад. 7б).

12. а) $\sin(2\pi-\beta) = -\sin\beta$;
б) $\cos(2\pi-\beta) = \cos\beta$;
в) $\text{tg}\,(2\pi-\beta) = -\text{tg}\,\beta$;
г) $\text{cotg}\,(2\pi-\beta) = -\text{cotg}\,\beta$.
Упътване: Представете $2\pi-\beta = \pi+(\pi-\beta)$.

а) Приложете зад. 11а) и зад. 10а); б) Приложете зад. 11б) и зад. 10б); в) Приложете зад. 11в) и зад. 10в); г) Приложете зад. 11г) и зад. 10г).

13. а) $\sin(2\pi+\beta) = \sin\beta$;
б) $\cos(2\pi+\beta) = \cos\beta$;
в) $\text{tg}\,(2\pi+\beta) = \text{tg}\,\beta$;
г) $\text{cotg}\,(2\pi+\beta) = \text{cotg}\,\beta$.
Упътване: Представете $2\pi+\beta = 2\pi-(-\beta)$.

а) Приложете зад. 12а) и зад. 6.; б) Приложете зад. 12б) и зад. 2; в) Приложете а), б) и (3); г) Приложете б), а) и (4).

14. а) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;
б) $\text{tg}\,(\alpha+\beta) = \dfrac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1-\text{tg}\,\alpha\text{tg}\,\beta}$;
в) $\text{cotg}\,(\alpha+\beta) = \dfrac{\text{cotg}\,\alpha\text{cotg}\,\beta - 1}{\text{cotg}\,\alpha + \text{cotg}\,\beta}$;
Упътване: Представете $\alpha+\beta = \alpha-(-\beta)$.

а) Приложете (6), зад. 2 и зад. 6; б) Приложете (3), зад. 5, а), разделете числителя и знаменателя на $\cos\alpha\cos\beta$ и приложете (3); в) Приложете (4), а), зад. 5, разделете числителя и знаменателя на $\sin\alpha\sin\beta$ и приложете (4).

15. а) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;
б) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;
в) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$;
г) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$;
д) $\text{tg}\,2\alpha = \dfrac{2\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$;
е) $\text{cotg}\,2\alpha = \dfrac{\text{cotg}^2\alpha - 1}{2\text{cotg}\,\alpha}$.

Упътване: а) Приложете зад. 5 при $\alpha=\beta$; б) Приложете зад. 14а) при $\alpha=\beta$; За в) и г) от $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$ следва, че $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$ или $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$; в) Използвайте б) и $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$; г) Използвайте б) и $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$; д) Приложете зад. 14б) при $\alpha=\beta$; е) Приложете зад. 14в) при $\alpha=\beta$.

16. а) $\sin\beta = 2\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}$;

б) $\cos\beta = \cos^2\dfrac{\beta}{2} - \sin^2\dfrac{\beta}{2}a$;

в) $\cos\beta = 2\cos^2\dfrac{\beta}{2} - 1$;

г) $\cos\beta = 1 - 2\sin^2\dfrac{\beta}{2}$;

д) $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\beta}{2}}$;

е) $\operatorname{cotg}\beta = \dfrac{\operatorname{cotg}^2\dfrac{\beta}{2}-1}{2\operatorname{cotg}\dfrac{\beta}{2}}$.

Упътване: Нека $\beta = 2\alpha$. Тогава $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$. Приложете за а), б), в), г), д) и е) съответно зад. 15 а), б), в), г), д) и е).

17. а) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$;

б) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$;

в) $\operatorname{cotg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta + 1}{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha}$.

Упътване: Представете $\alpha-\beta = \alpha + (-\beta)$. а) Приложете зад. 5, зад. 2 и зад. 6; б) Приложете зад. 14б) и зад. 7а); в) Приложете зад. 14в) и зад. 7б).

18. а) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

б) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

в) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

г) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

Упътване: Нека $x+y=\alpha$ и $x-y=\beta$. Като решите тази система относно x и y, получавате $x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$. Заместете α и β в левите страни на тъждествата.

а) Приложете зад. 5 и зад. 17а) и след приведение заместете значенията на x и y; б) Приложете зад. 5 и зад. 17а) и повторете същото, както в а); в) Приложете зад. 14а) и (6) и повторете същото, както в а); г) Приложете зад. 14а) и (6) и повторете същото, както в а).

19. а) $\sin A\cos B = \dfrac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]$;

б) $\cos A\cos B = \dfrac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$;

в) $\sin A\sin B = -\dfrac{1}{2}[\cos(A+B) - \cos(A-B)]$.

Упътване: Нека $A+B=\alpha$ и $A-B=\beta$. Тогава $A = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ и $B = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$. Приложете в дясната страна зад. 18. а) Приложете зад. 18а); б) Приложете зад. 18в); в) Използвайте зад. 18г).

Заключителни бележки. Идеята да се направи така преговор на формулите по тригонометрия дойде след един поглед на написаното от проф. Тагамлицки за аналитична дефиниция на тригонометричните функции [1] (стр. 225). Разбира се, начинът, по който се прилагат в [1] е различен от този в настоящата статия, но задавайки всяка задача с подходящо упътване и използване на предходната, преговорът на формулите с молив и хартия е подходящ за запомняне и усвояване от ученика. Този метод е реализиран от автора при водене на курсове за кандидатстудентски и зрелостни изпити.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Тагамлицки, *Диференциално смятане*, София, Наука и изкуство, 1967.

Климент Василев
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. Акад. Г. Бончев, блок 8
1113 София
e-mail: kimivas@abv.bg

A METHOD FOR REVISION OF THE TRIGONOMETRY FORMULAS IN THE SECONDARY SCHOOL

Kliment Vasilev

The trigonometry formulas are given in the form of mathematical problems. Some of these problems are solved, and it is shown how the others can be solved with the help of adequate guidance that includes the previous problems. This method is suitable for revision in the secondary school, as well as for preparation for school-leaving exams and matriculation.