МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2010
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2010
Proceedings of the Thirty Ninth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Albena, April 6–10, 2010

ЗА ИЗВЪНКЛАСНИТЕ ФОРМИ НА ОБУЧЕНИЕ ПО МАТЕМАТИКА

Стоянка Вълчева, Владимир Тодоров

Средствата и "енергията", които се отделят през последните години за преподаване на "нехуманитарни науки" за съжаление са нерастяща функция на времето и това изглежа е тенденция не само в България. Ето защо според нас е важно да се усилва и узаконява така наречената "извънкласна" форма на преподаването и обучението по математика в средните училища. Това ще допринесе за запазването на интереса към математиката у тези ученици, които имат желание и (или) по-изявени способности за изучаване на естествените науки.

Голямото откритие решава някой голям проблем, но зрънце откритие има и в решаването на всяка задача.

Д. Пойа

1. Увод. Един сериозен проблем, който по естествен начин възниква в наши дни, е ***какво и как*** да се преподава в средното ни училище? Този въпрос е труден поне по две причини: технологиите се развиват, както е добре известно, почти "експоненциално" и второ, образованието често (ако не и винаги) е предмет на политически дебати и възгледи на хора, по-голямата част от които не са експерти в тази областта.

Ето защо, тази по принцип консервативна област в наши дни е в перманентна криза и предмет на най-разнообразни мнения и решения. Това обяснява донякъде и консервативността при избора на учебни програми и учебници – тема, която е важна, но не е предмет на тази статия. Трябва да признаем, че поне в България продължава негласната конкуренция между "хуманитари" (те преобладават в политическите дебати) и "нехуманитари". Тази леко комична ситуация не подобрява нивото на обучение на учениците в "нехуманитарната" област. Например, Стереометрия в средното училище практически не се преподава в основния курс. Това незабавно поражда допълнителни въпроси: как се преподават например география (Земята все пак не е плоска), физика, астрономия, химия и др.

Следва да признаем също така, че тази тендеция е световна. Например в международните олимпиади по математика отдавна не се предлагат стереометрични задачи, тъй като стереометрията в някои държави просто не влиза в учебните планове. Разбира се, има и по-оптимистични примери. В съседна Румъния има задължителна матура по математика, което обяснява доброто представяне на румънските отбори по математика в ученически и студентски олимпиади.

От казаното до тук следва, че учениците с "нехуманитарни" наклонности са поставени в неизгодно положение. Възможно е то да бъде подобрено чрез така наречената "извънкласна" работа. В тази статия авторите споделят част от опита си по извънкласните форми на обучение по математика.

2. Примери от реалната практика в ПГСАГ "Л. Байер". Известно е, че овладяването на математическите знания е труден процес. Той изисква от ученика системен и упорит труд, силна воля, съобразителност, досетливост, въображение, логическо мислене и т.н. Поради това е сложна задачата на учителя за създаване на интерес към изучаването на математиката, който да надхвърля рамките на обикновения стремеж за получаване на добра оценка по този предмет.

Ето някои форми, начини и средства, които първият автор е използвал за постигане на тази цел:

- Формиране у учениците на отговорно отношение към ученето.
- Диферинциран подход към учениците и отчитане особеностите на най-добре подготвените.
- Разграничаване на близките, средните и далечни перспективи в работата с учениците.
- Създаване на благоприятни психологически условия, учениците да не изпитват излишно емоционално напрежение.
- Избор на подходяща система от методи за работа в извънкласните форми по математика.
- Постепенно прерастване на извънкласните форми по математика в уроци за изграждане на методи в работата на ученика.

Етапи за създаване на вътрешни потребности и мотиви в учениците за участие в извънкласни форми:

- Основно се използва учебният материал, предвиден в учебната програма.
- Запознаване на учениците с въпроси, които са свързани с учебната програма, но не са включени в уроците по математика (ЗП).
- Запознаване на учениците с въпроси, които не са свързани с учебната програма по математика (занимателна математика, история на математиката, връзка с други учебни предмети и изкуство).

По наше мнение част от тези теми трябва да бъдат включени в учебните планове.

Интересът и любовта към математиката се пораждат преди всичко от работата на учителя в час, но е важно да се предвидят и допълнителни средства и форми, които да разширяват и повишават този интерес. Би трябвало заниманията в час да бъдат интересни, да минават напрегнато, но резултатно и да бъдат условие за самостоятелна работа на ученика в къщи.

Да разгледаме няколко примера.

При преговора в 8 (9) клас беше акцентирано върху операцията отделяне на точен квадрат от квадратен тричлен чрез следната задача (в следващия текст ще посочим и други начини, по които може да се разсъждава):

Намерете най-малката стойност на израза $P = x^2 - 5x + 2$ и съответната стойност на аргумента:

$$P = x^2 - 5x + 2 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}, \quad P_{\min} = -\frac{17}{4} \quad \text{при} \quad x = \frac{5}{2}.$$

По време на консултацията (кръжока) бяха разгледани следните задачи:

1) Намерете най-малката стойност на $A = \dfrac{5}{x^2 - 2x + 5}$ и стойността на променливата, за която тя се достига.

2) Намерете най-голямата стойност на $B = \dfrac{1}{-x^2 + 2x + 1}$ и стойността на променливата, за която тя се достига.

3) да се намерят всички цели стойности на k, за които изразът $C = \dfrac{k^2 + 2k + 6}{k + 4}$ е цяло число.

Лутането за преобразуването на С във вида $C = k - 2 + \dfrac{14}{k + 4}$ даде повод да се запознаят учениците с правилото за деление на многочлен с многочлен.

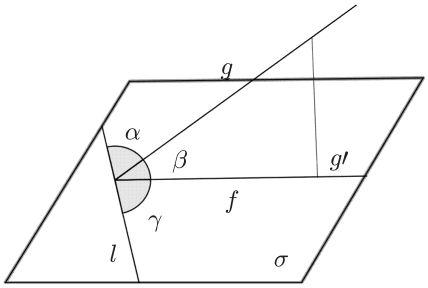
Важен момент за активното и съзнателно участие на учениците в извънкласните форми по математика е създаване на условия за творческа самостоятелна работа. Преди две учебни години на някои ученици бяха предложени проекти за дългосрочна самостоятелна работа от темите "История на математиката" и "Приложение на математиката". Това предизвика по-голям интерес у учениците към задълбочени знания. Предложени бяха също така примерни работни заглавия по проблемно-познавателни задачи с допълнителна информация за няколко сайта, от които могат да получат повече информация. Практиката показа, че учениците се затрудняват при подбора на подходяща информация, което наложи да се помогне на някои от тях. Разработените от тях презентации "Многостени" , "Спирали" , "Плочки на Пенроуз" бяха представени на проведената "Вечер на математиката". Заедно с наставниците си (преподаватели по техническо чертане) по-малките ученици показаха творческо виждане и практически умения от математиката и техническото чертане.

Интерес предизвика презентацията за биографията на Мориц Ешер (известен художник, творец с нестандартно виждане в математиката и архитектурата). Изключително интересната разработка "Невъзможни сгради", базираща се на творбите на Ешер, постави финала на вечерта на математиката.

При изучаване на геометричния материал е добре да се ръководим от това, че колкото и съдържателна да е една задача, ако учениците я решават изолирано от други задачи, ползата от нея не е голяма. Групирането на няколко задачи по един и същ белег, около някаква идея винаги помага за усвояването на знанията и техните приложения.

При обобщението на темата "Перпендикулярност в пространството" например е добре да се акцентира върху понятието *линеен ъгъл на двустенен ъгъл*, определяне мястото на петата на височините на някои наклонени призми. Обединяващо звено е приложението на Теремата за трите перпендикуляра.

С доказателството на формулата $\cos\gamma = \cos\alpha.\cos\beta$, където γ е острият ъгъл между правите g и l, а ъгълът между правата g и равнината σ е α, като правата l лежи в σ и сключва ъгъл β с ортогоналната проекция g' на g в равнината σ (Фиг. 1) се дава възможност за разглеждане на група стереометрични задачи, обединени от условието, че всички могат да бъдат решени с използването на тази формула.



Фиг. 1

Последователно се решават задачите:

4) Ако наклонената отсечка AB към равнината μ сключва равни ъгли с правите c и c' от равнината μ, то ортогоналната проекция на AB върху μ образува с тези прави равни ъгли.

5) Да се докаже, че всеки два непресичащи се ръба в правилна триъгълна пирамида са взаимно перпендикулярни.

6) Околният ръб CC_1 на наклонена призма с основа равностранен триъгълник сключва с основните ръбове AC и BC равни ъгли α. Да се определи видът на околните стени на призмата. Да се изчисли лицето на околната повърхнина на призмата ако $|AB| = a$, $|CC_1| = b$, $\alpha = 45°$.

За да илюстрираме използването на задача 4 при определяне на петата на височината на някои наклонени призми, разглеждаме задача 1.7:

7) Ръбовете, които излизат от един връх на паралелепипед, имат дължини съответно a, b, c, като първите два са взаимно перпендикулярни, а третият сключва с всеки от тях ъгли с мярка $60°$. Определете обема на паралелепипеда.

Чрез тази верига от задачи, учениците усвояват основната идея и това дава възможност за решаване на по-трудни задачи с учениците в часовете по СИП. Създаден е солиден мотив за активното им творческо участие.

3. Умението да мислим творчески може да се придобие. Това може би е малко пресилено твърдение. Не е пресилено обаче (и не е невъзможно да се осъществи) в *преподаването* на математиката да се избегне схоластиката. Педантизмът като правило не се възприема добре от младите хора, а и според нас не е особено необходим в средното училище и в повечето университети. Педантизмът обаче доминира и в учебните планове, и в съответните учебници.

Да разгледаме например въпроса: какво е това ирационално число? Масовият отговор, който дават студенти първи курс, първи семестър (с други думи доскорошни ученици), е “ами това е $\sqrt{2}$”. В съзнанието на повечето ученици е затвърдена идеята, че ирационално число е само това, което има вида $\sqrt{n}$; $n \neq k^2$. Между другото съвсем не е трудно да се пояснят някои свойства на числовата система (без претенции за “прецизност на университетско ниво”). За да поясним за какво става дума, ще отбележим, че повечето ученици знаят (или поне вярват), че рационално е всяко число, което се записва като периодична (и, забележете, или “крайна”) дроб. Не че крайните дроби не са периодични; този факт обаче *не е очевиден* за схоластично възпитаните млади хора.

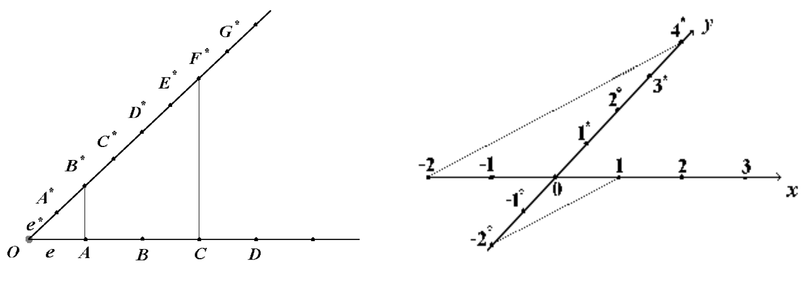
Може да се използва това за лесни примери на различни и понякога забавни задачи:

8) Докажете, че числото $\nu = 0,12345678910111213\ldots$, където след запетаята за записани едно след друго всички естествени числа, е ирационално.

9) Дадени са числата $\alpha = 0,010010001000010\ldots$ и $\beta = 0,303303330333303\ldots$ Докажете, че те са ирационални. Рационални или не са числата $\dfrac{\alpha}{\beta}$ и $\alpha\beta$? Упътване: $3\alpha + \beta = \dfrac{1}{3}$.

Системата на реалните числа $\mathbf{R}$ е доста сложно устроена и поради тази причина според нас всеки опит да бъде обяснена "правилно" от логическа гледна точка в средното училище е обречен. От друга страна, неформалният подход би могъл да улесни (разбира се "лошо" от педантична гледна точка) разбирането на някои основни свойства на $\mathbf{R}$.

Ето още един типичен въпрос, с който студентите от първи курс не са на ясно: защо минус по минус дава плюс? Отговорът на този въпрос не е тривиален. Ойлер например има някои философски разсъждения по този въпрос, които завършват с израза "защото няма какво друго да бъде". От друга страна може да се даде нагледно обяснение с теоремата на Талес. Наистина, след като в школата на Питагор откриват, че съществуват несъизмерими отсечки (VI–V век пр. н.е.) в античната математика започват да тълкуват числата като точки от "полуправа" (тогава не са признавали отрицателните числа). На Фиг. 2(а) се вижда как 2 по 3 дава 6.



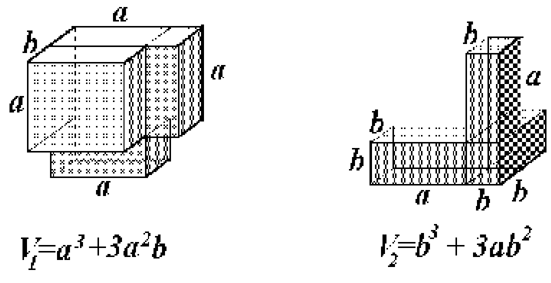
(а) (б)

Фиг. 2

В наши дни използваме за онагледяване на $\mathbf{R}$ "числовата ос" (остатък от тази епоха) и ако приложим "античните" разсъждения към нея се вижда защо $(-2)(-2) = +4$ (Фиг. 2(б)); аналогично може да се види, че $(-).(+) = (-)$ и това, разбира се, също следва от теоремата на Талес.

Изобщо "неформалните" разсъждения често се възприемат с по-голям ентусиазъм дори и в редовния курс. Ето как можем "да обясним" формулата за $(a+b)^3$:

Ясно е, че $V_1 + V_2 = (a+b)^3$. По същия начин на Фиг. 3 е показано как се решава известното уравнение на ал-Хорезми $x^2 + 10x = 39$. Това е, разбира се, познатото "допълване до точен квадрат". То по наше мнение не е толкова "схоластично" и не се възприема заповедно като механичното прилагане на формулата $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Между другото вторият корен $(x = -13)$ също може да се "нарисува", ако използваме ориентирани отсечки.



Фиг. 3

Тези примери могат да бъдат продължени и според нас това също е подходяща тема за извънкласна форма на преподаване. Разбира се, остава проблема за излишната схоластика в преподаването на Математика в средните ни училища. Надяваме се това да е повод за дискусия по тези въпроси.

Остават неизяснени твърде много неща. В средното училище се преподават някои елемент на анализа и се изучават по–подробно някои класове от функции: полиноми, рационални функции, тригонометрични функции, показателни функции и някои от техните обратни. Но не е ясно например защо не се преподават производни на показателни и логаритмични функции. Очевидно числото на Непер е (отново схоластична) причина за това, то обаче не обяснява как в други образователни системи (например в Турция) колегите се справят с този проблем. Ще завършим със съвсем проста забележка: обратните тригонометрични функции са също табу за средното училище. От друга страна всеки стандартен калкулатор от Windows например притежава опциите “inv” и “sin” което си е arcsin. Да, при преподаването на математика може и трябва да се използват многобройните стандартни и разработени от доста колеги пакети. Те за жалост са главно обект на обсъждане на конференции и изолирани демонстрации в отделни средни (за жалост и в повечето висши) училища.

Стоянка Вълчева
ПГСАГ “Л. Байер”
гр. Стара Загора
e-mail: s.valcheva@mail.bg

Владимир Тодоров
Катедра “Математика”
УАСГ
ул. “Хр. Смирненски” 1
София
e-mail: vtt_fte@uacg.bg

ON THE OUT-OF-CLASS METHODS OF TEACHING MATHEMATICS

Stojanka Valcheva, Vladimir Todorov

In the present talk we discuss some problems that arise out of the limiting the time designed for teaching Mathematics in the secondary school in Bulgaria.