МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2010
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2010
Proceedings of the Thirty Ninth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Albena, April 6–10, 2010

ВЪРХУ ЕДИН КЛАС КРИВИ ОТ ВТОРА СТЕПЕН

Сава Гроздев, Веселин Ненков

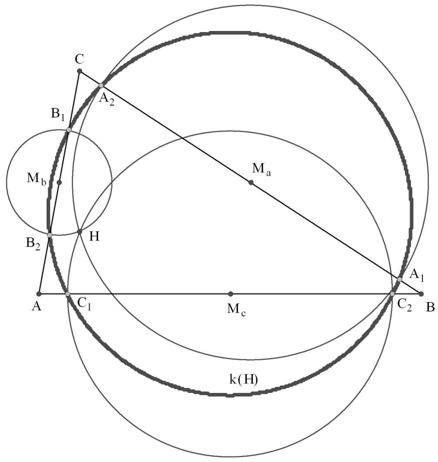
С помощта на компютърната програма “THE GEOMETER'S SKETCHPAD” са реализирани обобщения на една задача от Международната олимпиада по математика през 2008 г.

В книга трета “Правилата за научни разсъждения” на своето произведение “Математически принципи на естествознанието” Исак Нютон отбелязва, че “свойствата на телата се опознават само с експерименти” (вж. Дорфман, Я. Г., История на физиката, т. 1, 1980, с. 287 и с. 314). Още в зората на съвременната наука Рене Декарт пише, че колкото повече навлизаме в абстрактното, толкова повече се нуждаем от конкретни примери и експерименти. Мощно средство за експериментиране и трупане на опит е компютърът. Той дава възможност за осъзнат анализ на конкретна ситуация, например условието на дадена задача, а оттук и осмисляне на данните в ситуацията. Особено важна е възможността за вариране на явните и скритите свойства на елементите в условието, ако става дума за задача. Едва тогава се увеличава шансът за поява на прозрение и откриване на нещо ново и съдържателно. В тази връзка ще цитираме френския педагог Андре Фуше, който в [1] пише: “Интуицията идва по-късно, след първите сполуки, защото е техен почти непосредствен резултат, но не и тяхна причина.” В основата са експериментът и практиката.

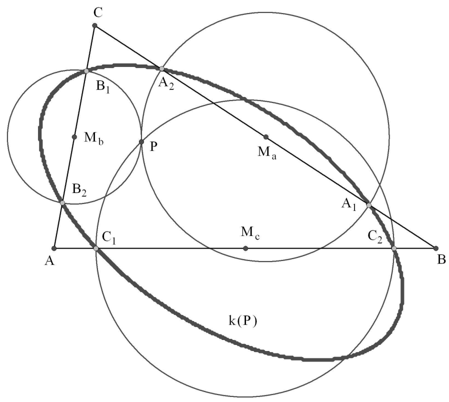
Настоящата статия е пример за това как компютърът може да бъде използван за откриване на нови твърдения. С помощта на програмата THE GEOMETER'S SKETCHPAD (GSP) се търси аналогия между различни геометрични обекти и техните елементи. Добре известно е, че много често едно ново математическо твърдение води началото си от вече известен факт. Надежден евристичен подход за откриване на непозната закономерност е промяната на основни параметри в познато твърдение. Включването на старите параметри като специални случаи на новите увеличава значително шанса за получаване на съответно обобщение на известно твърдение. При това, ако измененията на новите параметри се отдалечат твърде много от първоначалните, може да се получи твърдение, което е съвсем различно от първоначалното. Разбира се, в много случаи експериментирането с компютър не води до съществен резултат. По-долу е направена илюстрация на едно успешно търсене, което е свързано с криви от втора степен и определянето на някои техни свойства. Отправно начало е една от задачите на 49-та международна олимпиада по математика през 2008 г. Тази задача е следната:

Даден е остроъгълен триъгълник ABC с ортоцентър H. Окръжността с център средата M_a на BC, минаваща през H, пресича правата BC в точки A_1 и

A_2. Аналогично, окръжността с център средата M_b на CA, минаваща през H, пресича правата CA в точки B_1 и B_2, и окръжността с център средата M_c на AB, минаваща през H, пресича правата AB в точки C_1 и C_2. Да се докаже, че точките A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2 лежат на една окръжност. (Фиг. 1.)



Фиг. 1



Фиг. 2

Да заменим ортоцентъра H с произволна точка P от равнината на ΔABC и да извършим построения, аналогични на описаните в горната задача. Експериментите с GSP показват, че шестте точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2 винаги са върху крива от втора степен (Фиг. 2.). Нещо повече, само в случая $P \equiv H$ кривата е окръжност. Получаваме основания да формулираме следното:

Твърдение 1. *Дадени са ΔABC и произволна точка P от равнината му. Ако окръжността с център средата M_a на BC, минаваща през P, пресича правата BC в точки A_1 и A_2, а двойките точки B_1, B_2 и C_1, C_2 са определени по аналогичен начин върху правите CA и AB, то точките A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2 лежат върху една крива от втора степен $k(P)$, която е окръжност, точно когато P е ортоцентърът на ΔABC.* (Фиг. 2.)

Продължаваме експериментирането, като използваме други забележителни точки за ΔABC. За съжаление, опитите с медицентъра G и центъра O на описаната окръжност не дават резултат. Напротив, точките от описаната окръжност насочват към:

Следствие 1. *Ако P е произволна точка от описаната за ΔABC окръжност, то $k(P)$ е хипербола.*

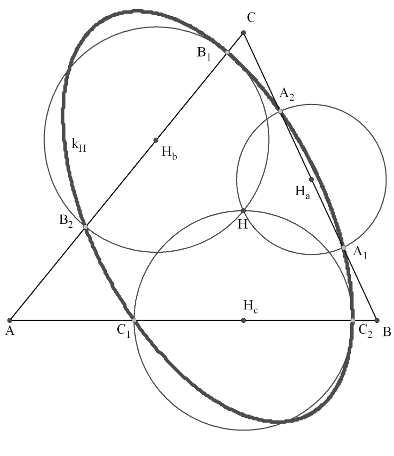
Следващите експерименти, обаче показват, че това следствие се разклонява по следния начин:

Следствие 1.1. *Ако P е произволна точка от описаната окръжност Γ за остроъгълен или правоъгълен триъгълник ABC, то $k(P)$ е хипербола.*

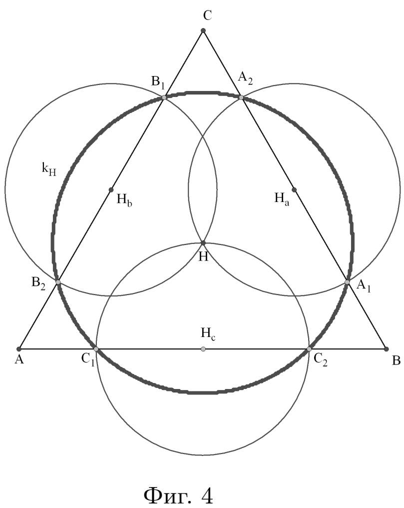
Следствие 1.2. *Ако P е точка от описаната окръжност Γ за тъпоъгълен триъгълник ABC, то $k(P)$ е две пресекателни прави, ако P е някоя от пресечните* *точки на* Γ *и* Ω*, а за всички останали положения на* P *върху* Γ *кривата* $k(P)$ *е хипербола.*

По-нататъшното експериментиране е свързано естествено с отказ точките M_a, M_b и M_c да са точно средите на страните на триъгълника. Една разумна възможност е да ги разглеждаме като ортогонални проекции на точката O съответно върху правите BC, CA и AB. Но тогава вместо O бихме могли да вземем произволна точка X и да разгледаме окръжностите, чиито центрове са ортогоналните проекции на X и които минават през P. Ситуацията се оказва доста обща и експериментите с GSP не дават резултат. Резултат не се получава дори в случая $P \equiv H$. От твърдение 1 обаче следва, че когато $X \equiv P \equiv O$, получаващите се шест точки лежат на крива $k\,(O)$. Това ни дава основание да експериментираме и с други забележителни точки за ΔABC. Този път успяваме да открием съдържателен случай и той е когато $X \equiv P \equiv H$. По-подробните изследвания върху този случай ни довеждат до формулировката на следното:

Твърдение 2. *Нека* ΔABC *е произволен, различен от правоъгълен и нека* H *е ортоцентърът му. Ако окръжността с център петата на височината през върха* A *пресича правата* BC *в точки* A_1 *и* A_2*, а двойките точки* B_1*,* B_2 *и* C_1*,* C_2 *са определени по аналогичен начин върху правите* CA *и* AB*, то точките* A_1*,* A_2*,* B_1*,* B_2*,* C_1 *и* C_2 *лежат върху една крива от втора степен* k_H*, която е окръжност точно когато* ΔABC *е равностранен.* (Фиг. 3, 4.)



Фиг. 3



Фиг. 4

Да се върнем към първоначалната задача. Както отбелязахме, центровете M_a, M_b и M_c на окръжностите са ортогоналните проекции на центъра на описаната окръжност, а общата точка на тези окръжности е ортоцентърът H. Нека обърнем ситуациата: центровете на окръжностите да са ортогоналните проекции на H, а тяхна обща точка да е O. Еспериментът показва, че получените по този начин шест точки лежат на една окръжност. Нещо повече, тази окръжност е еднаква с окръжността от първоначалната ситуация. Но да обърнем внимание, че точките O и H са изогонално спрегнати спрямо ΔABC. Това ни дава основание да проверим с GSP дали, ако произволни изогонално спрегнати спрямо ΔABC точки P и Q си разменят ортогоналните проекции по начина, по който го правят точките O и H, биха се получили две шесторки точки, които лежат на две еднакви окръжности. С помощта на експерименти получаваме основания за формулиране на:

Твърдение 3. *Нека P^1 и P^2 са изогонално спрегнати точки спрямо даден ΔABC, а точките P_a^j, P_b^j, P_c^j са ортогоналните проекции на P^j $(j=1,2)$ съответно върху правите BC, CA и AB. Ако окръжността с център точката P_a^j, минаваща през P^s $(j \neq s = 1,2)$, пресича правата BC в точки A_1^j и A_2^j, а двойките точки B_1^j, B_2^j и C_1^j, C_2^j са определени по аналогичен начин върху правите CA и AB, то точките A_1^j, A_2^j, B_1^j, B_2^j, C_1^j и C_2^j $(j=1,2)$ лежат върху две еднакви окръжности с центрове в точките P^1 и P^2.* (Фиг. 5.)

Да обърнем внимание, че точките от описаната за ΔABC окръжност (и само те) не удовлетворяват твърдение 3, тъй като нямат изогонално спрегнати спрямо ΔABC (в смисъл на крайни точки). За да попълним този "недостатък", да разгледаме произволна точка P от описаната окръжност и нейните ортогонални проекции P_a, P_b и P_c съответно върху правите BC, CA и AB. Да построим окръжностите с центрове точките P_a, P_b и P_c така, че да минават през P. Наблюденията с GSP водят до:

Твърдение 4. *Нека P е произволна точка от описаната окръжност за даден ΔABC, а P_a, P_b и P_c са ортогоналните проекции на P съответно върху правите BC, CA и AB. Ако окръжността с център точката P_a, минаваща през P, пресича правата BC в точки A_1 и A_2, а двойките точки B_1, B_2 и C_1, C_2 са определени по аналогичен начин върху правите CA и AB чрез точките P_b и P_c, то точките A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2 лежат върху две перпендикулярни прави s_1 и s_2.* (Фиг. 6.)

Двете прави в твърдение 4, взети заедно, образуват един специален вид крива от втора степен. Добре известен факт е, че точките P_a, P_b и P_c лежат на една права s_P, която е симсъновата права за точката P [2]. По-нататъшните изследвания на тази ситуация дават основания за следния резултат:

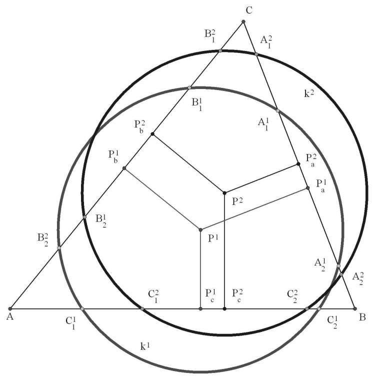
Следствие 2. *Пресечните точки на правите s_1, s_2 и s_P заедно с пораждащата ги точка P определят върховете на квадрат.* (Фиг. 6.)

Следва да узаконим фомулираните твърдения посредством техни доказателства. Поради ограничения обем на статията тук ще се спрем върху доказателството само на твърдение 1. За целта ще използваме барицентрични координати спрямо ΔABC, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ [3]. Нека $|BC|=a$, $|CA|=b$ и $|AB|=c$. Тогава $16S^2 = 2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$, където S е лицето на ΔABC. За произволна точка $P(\lambda,\mu,\nu)$ $(\lambda+\mu+\nu=1)$ от равнината на ΔABC въвеждаме означението: $\delta = a^2\mu\nu+b^2\nu\lambda+c^2\lambda\mu$. Точката P лежи върху описаната за ΔABC окръжност точно когато е изпълнено равенството $\delta=0$. Ще припомним още, че ако $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ са произволни точки от равнината на ΔABC, то [3]:

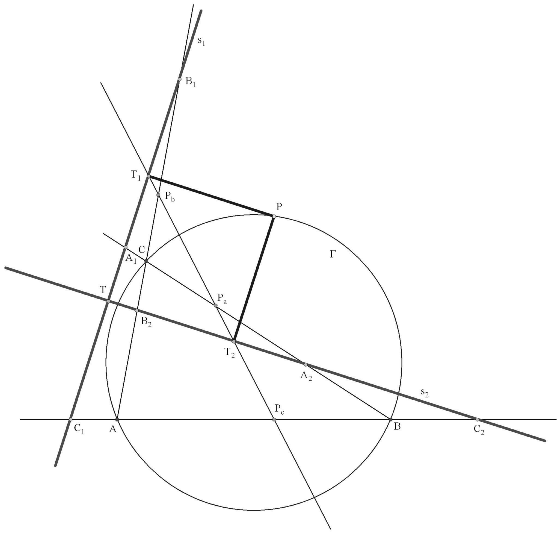
$$(1)\quad |M_1M_2|^2 = -(y_1-y_2)(z_1-z_2)\,a^2-(z_1-z_2)(x_1-x_2)\,b^2-(x_1-x_2)(y_1-y_2)\,c^2$$

Известно е също [3], че два вектора $\overrightarrow{u_1}(\lambda_1,\mu_1,\nu_1)$ и $\overrightarrow{u_2}(\lambda_2,\mu_2,\nu_2)$ ($\lambda_1+\mu_1+\nu_1=0$, $\lambda_2+\mu_2+\nu_2=0$), компланарни с равнината на ΔABC, са перпендикулярни точно когато е изпълнено равенството:

$$(2)\qquad (\mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1)\,a^2+(\nu_1\lambda_2+\nu_2\lambda_1)\,b^2+(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)\,c^2=0.$$



Фиг. 5



Фиг. 6

Доказателство на твърдение 1. Ясно е, че твърдението няма смисъл, когато P съвпада с някоя от точките A, B и C. Затова ще изключим от разглеждане тези точки.

Нека $p_a = \dfrac{|PM_a|}{a}$, $p_b = \dfrac{|PM_b|}{b}$ и $p_c = \dfrac{|PM_c|}{c}$. Тогава от (1) координатите на разглежданите шест точки се изразяват по следния начин:

$$A_1\left(0, \frac{1}{2} + p_a, \frac{1}{2} - p_a\right), \quad A_2\left(0, \frac{1}{2} - p_a, \frac{1}{2} + p_a\right), \quad B_1\left(\frac{1}{2} - p_b, 0, \frac{1}{2} + p_b\right),$$

$$B_2\left(\frac{1}{2} + p_b, 0, \frac{1}{2} - p_b\right) \quad C_1\left(\frac{1}{2} + p_c, \frac{1}{2} - p_c, 0\right), \quad C_2\left(\frac{1}{2} - p_c, \frac{1}{2} + p_c, 0\right).$$

Лесно се проверява, че тези точки удовлетворяват уравнението:

$$(3)\ \ k(P): \begin{array}{l} \left(4p_a^2-1\right)\left(4p_b^2-1\right)\left(4p_c^2-1\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)+2\left(4p_b^2-1\right)\left(4p_c^2-1\right)\left(4p_a^2+1\right)yz+ \\ +\left(4p_c^2-1\right)\left(4p_a^2-1\right)\left(4p_b^2+1\right)zx+2\left(4p_a^2-1\right)\left(4p_b^2-1\right)\left(4p_c^2+1\right)xy=0. \end{array}$$

Това доказва, че точките A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2 лежат на крива от втора степен $k(P)$.

Забележка. В проведеното доказателство никъде не се използва фактът, че разглежданите окръжности минават през една точка, т.е. те са произволни. Затова могат да се изследват специални случаи, когато те се допират до окръжност, права или са подложени на друго допълнително условие.

От (1) лесно се вижда, че са изпълнени равенствата:

$$(4)\qquad \begin{aligned} |M_aP|^2 &= a^2p_a^2 = \frac{1}{2}\left(-a^2+b^2+c^2\right)\lambda + \frac{1}{4}a^2 - \delta, \\ |M_bP|^2 &= b^2p_b^2 = \frac{1}{2}\left(a^2-b^2+c^2\right)\mu + \frac{1}{4}b^2 - \delta, \\ |M_cP|^2 &= c^2p_c^2 = \frac{1}{2}\left(a^2+b^2-c^2\right)\nu + \frac{1}{4}c^2 - \delta. \end{aligned}$$

За да докажем втората част на твърдение 1, означаваме с O_A и O_C центровете на описаните окръжности съответно за триъгълниците $A_1A_2B_1$ и $C_1C_2B_2$. Като намерим с помощта на (2) уравненията на по две симетрали за всеки от тези триъгълници и решим образуваните от тях системи, получаваме координатите на O_A и O_C в следния вид:

$$x_{O_A} = -\frac{2a^2\left[4p_{ab} + 2\left(-a^2+b^2+c^2\right)p_b - c^2\right]}{32S^2\left(1-2p_b\right)},$$

$$y_{O_A} = \frac{4\left(a^2+b^2-c^2\right)p_{ab} - 4b^2\left(a^2-b^2+c^2\right)p_b + 2a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^4 - b^4}{32S^2\left(1-2p_b\right)},$$

$$z_{O_A} = \frac{4\left(a^2-b^2+c^2\right)p_{ab} - 4c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)p_b + 2a^2b^2 + 3b^2c^2 + c^2a^2 - a^4 - b^4 - 2c^4}{32S^2\left(1-2p_b\right)},$$

$$x_{O_C} = \frac{4\left(a^2-b^2+c^2\right)p_{cb} - 4a^2\left(-a^2+b^2+c^2\right)p_b + 2b^2c^2 + 3a^2b^2 + c^2a^2 - b^4 - c^4 - 2a^4}{32S^2\left(1-2p_b\right)},$$

$$y_{O_C} = \frac{4\left(-a^2+b^2+c^2\right)p_{cb} - 4b^2\left(a^2-b^2+c^2\right)p_b + a^2b^2 + 2b^2c^2 + c^2a^2 - b^4 - c^4}{32S^2\left(1-2p_b\right)},$$

$$z_{O_C} = -\frac{2c^2\left[4p_{cb} + 2\left(a^2+b^2-c^2\right)p_b - a^2\right]}{32S^2\left(1-2p_b\right)},$$

където $p_{ab} = a^2p_a^2 - b^2p_b^2$ и $p_{cb} = c^2p_c^2 - b^2p_b^2$.

Ако тези окръжности съвпадат, то $O_A \equiv O_C$. Оттук намираме:

$$-2a^2\left(-a^2+b^2+c^2\right)\lambda + \left(3a^2-b^2+c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\mu - \left(a^2-b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)\nu = 0,$$

$$\left(-a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)\lambda + 2\left(c^2-a^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\mu - \left(a^2+b^2-c^2\right)\left(-a^2+b^2+c^2\right)\nu = 0.$$

Като добавим към тези равенства и $\lambda+\mu+\nu=1$, получаваме линейна система от три уравнения с три неизвестни, която има единствено решение:

$$\lambda_H = \frac{(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{16S^2},$$

$$\mu_H = \frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(-a^2+b^2+c^2\right)}{16S^2},$$

$$\nu_H = \frac{\left(-a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)}{16S^2}.$$

Полученият резултат обаче съвпада с координатното представяне на ортоцентъра H. Остава да отбележим, че от единствеността на решението на системата, описваща релацията $O_A \equiv O_C$, следва, че H е единствената точка, за която $k\,(P \equiv H)$ е окръжност. С това твърдението е напълно доказано.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Fouche. La pedagogie mathematiques, Paris, 1952.

[2] Х. Хитов. Геометрия на триъгълника. Народна просвета, София, 1990, с. 231, зад. 1050.

[3] Г. Паскалев, И. Чобанов. Забележителни точки в триъгълника. Народна просвета, София, 1985.

Сава Гроздев
Институт по математика и информатика
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Веселин Ненков
Технически колеж Ловеч
ул. "Съйко Съев" № 31
Ловеч
e-mail: vnenkov@mail.bg

ON A CLASS OF SECOND DEGREE CURVES

Sava Grozdev, Vesselin Nenkov

By the software THE GEOMETER'S SKETCHPAD some generalizations of a problem from the International Mathematical Olympiad in 2008 are realized.