

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2010
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2010
*Proceedings of the Thirty Ninth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Albena, April 6–10, 2010*

ГОЛЯМА ИДЕЯ – ВСЕ ОЩЕ С МАЛКА ПОПУЛЯРНОСТ*

Бахсен Исмаилова-Исуфова, Ридван Исуфов

В съобщението е представено зараждането и развитието през последните 50 години у нас на идеята за систематизиране на определенията и теоремите според дейностите, които могат да се извършват с тях. Освен това е предложен вариант на методика за включване използването на персонални компютри в тази дейност и продължено изследването на ролята ѝ за развитието на евристични способности на учащите се в това отношение.

Свидетели сме не само на бурното развитие на математиката като наука, а и на все по-широкото проникване на математическите знания, методи и подходи в други науки и практиката. С това силно нараства ролята на методиката на обучението по математика, тъй като все по широк става кръгът на хората, които използват математическите знания във всекидневната си работа. А използването на математически знания се свежда в крайна сметка до използване на определения, теореми и формули. Особено интересен е въпросът: “Защо достигаем до използването на теоремите?” Този въпрос има различни отговори. Един от тях се крие още в историята на математиката и ще отговорим на него като установим кои са основните подбуди на древногръцките математици за създаването на теоремите. Какво са постигнали те чрез тяхното създаване и използване? Оказва се, че една от подбудите за създаване на теоремите в Древна Гърция (а през XVI и XVII век и на буквената символика от европейските математици) е стремежът да се решават наведнъж много конкретни задачи, чиито решения се състоят от едни и същи стъпки. Затова получените резултати след това може да се използва наготово за различни случаи. В училище обаче се изучават много теореми и използването им от учениците се затруднява от факта, че все още те не се групират целенасочено според възможностите, които осигуряват за извършване в различни дейности, т.е. не се групират по предназначение.

Целта на настоящото съобщение е да се изследва зараждането и развитието през последните 50 години у нас на идеята за систематизиране на определенията и теоремите според дейностите, които може да се извършват с тях. Освен това да се предложи вариант на методика за включване използването на персонални компютри в тази дейност и да се продължи изследването на ролята ѝ за развитието на евристични способности на учащите се в това отношение.

За постигането на тази цел трябваше да се решат следните основни дидактически задачи:

* **Ключови думи:** Дидактическа система от признаци (ДСП). Дидактическа система от начин за действие (ДСНД).

1. Да се изследват съществуващи учебници по математика по отношение систематизирането на определенията и теоремите в тях в зависимост от дейностите, които могат да се извършват с тях.

2. Да се проучат теоретични източници, свързани с разглеждане на определенията и теоремите като средства за извършване на математически дейности.

3. Да се предложи начин за разкриване пред учениците и овладяване от тях на различни възможности за извършване на математическите дейности, които осигурява дадена теорема.

4. Да се предложи хартиен и електронен вариант за систематизиране на различни начини, чрез които може да се извършва една и съща дейност и да се разработи методика за усвояването ѝ от учениците.

За решаването на тези дидактически задачи беше проучена голямо количество литература, част от която е цитирана в съобщението. Бяха проведени интервюта с учители, използвали в една или друга степен идеята за систематизиране на определенията и теоремите според дейностите, които могат да се извършват с тях. Това са колегите Гица Иванова, Николай Райков, Стаматка Платиканова и др.

Съобщението няма претенции, че третира всеобхватно проблема за систематизирането на определенията и теоремите в училищния курс по геометрия. По-цялостно са обхванати определенията и теоремите, изучавани в 7 клас и отчасти в 8 клас, когато учениците се запознават със специфичния дедуктивен стил на геометрията.

Тъй като в досегашната практика не е обръщано достатъчно внимание на “дидактическите системи от свойства”, в съобщението те не намериха подobaващо място. Ще отбележим още, че съобщението всъщност представя в значителна степен резултати от дипломната магистърска работа на първия автор.

Ще продължим изложението, като цитираме текст, с който завършва докладът [22] на проф. Ил. Гюдженев, проф. Ив. Ганчев и проф. С. Гроздев, изнесен на конференцията на MASSE през септември 2009 г.:

“В заключение ще отбележим още:

Внимателното проследяване историята на Дидактиката на математиката естествено ни води до извода, че за творчески работещите дидактици фактически основните движещи фактори, казано на съвременен език, макар и недостатъчно осъзнато, винаги са имали синергетичен и рефлексивен характер. Затова днес, с известна уговорка, можем още да добавим: “Дидактиката на математиката е синтез на синергетика и рефлексия в действие.” Тази мисъл се оказва, че важи и за развитието на методиката на изучаването на математическите понятия в средното училище.”

В изложението по долу ще проследим накратко зараждането и развитието на идеята за систематизация на знанията, предимно по геометрия, у нас и отчасти в някои други страни, където се оказва, че този значим проблем все още е недостатъчно осъзнат и оценен.

1. Зараждане на идеята за систематизиране на теоремите по отношение на връзките им с понятията в работата на добри учители по математика. В [5] на стр.110, открихме, че за първи път в теоретичен план проф. Иван Ганчев отбелязва използването на “списъци” от начини за извършването на често срещани математически дейности, като доказването на “равенство на отсечки”, “равенство на ъгли”, “успоредност на прави” и др. По точно той пише:

“Характерна особеност в работите на учителите, които наистина добре обучават учениците си е тази, че те успяват в по-явен вид да покажат връзката между знанията за отделните понятия и съответстващата на тяхната структура – способности на разсъждения. Това те постигат, като съставят с учениците нещо като “списъци”, но обикновено написани начини, по които в даден момент могат да доказват принадлежността на конкретни обекти към обемите на някои понятия. Тези “списъци” за отделните понятия постепенно нарастват, но все пак се състоят от ограничен брой начини. За отбелязване е обаче, че тези “списъци” остават изолирани един от друг и имат някак си случаен характер, тъй като са правени не напълно осъзнато и последователно”. По-късно в по-новите си работи той ги нарича “дидактически системи от признаци” (ДСП). Заедно с това започва да употребява и словосъчетанието “Дидактическа система от начини за действие”, тъй като различните признаци осигуряват и различни начини за извършване на дейността “разпознаване”. Освен това формулите също осигуряват различни начини за действия. Затова по-нататък в изложението ще употребяваме, както словосъчетанието ДСП така и словосъчетанието “Дидактическа система от начини за действия” (ДСНД). Понякога за краткост ще пишем съответно “Система от признаци” (СП) и “Система от начини за действие” (СНД).

Открихме обаче, че почти в такъв вид подобни списъци се срещат и в книгата на Дьорд Пойа “Математическото откритие” [15, стр. 228], където по-конкретно той пише.

“Ние трябва да докажем, че $\sphericalangle ABC = \sphericalangle EFG$.

Как можем да докажем такова заключение? От какви предположения можем да изведем такова заключение?

Ние успяваме да си спомним няколко отнасящи се към въпроса факти, учени по-рано, няколко възможности за извеждане на такова заключение като това, което имаме да докажем. Два ъгъла са равни:

1. ако са съответни ъгли в еднакви триъгълници,
2. ако са съответни ъгли в подобни триъгълници,
3. ако са съответни ъгли, получени при пресичането на две успоредни прави с трета,
4. ако има един и същ трети ъгъл, допълнителен до 180°
5. ако са вписани ъгли в една и съща окръжност и се опират на една и съща дъга.

Тук имаме пет различни теореми, всяка, от които може да е приложима към нашия случай, пет различни предположения, от всяко, от които бихме могли да изведем исканото заключение. Можем да започнем работа с което и да е от тях. Например бихме могли да опитаме с (1) – бихме могли да въведем два подходящи триъгълника ABC и EFG и да се опитаме да докажем, че са еднакви. Ако успеем, желаното заключение би следвало непосредствено! А как бихме могли да докажем, че $\triangle ABC \cong \triangle EFG$? С този въпрос ние встъпваме в областта на регресивното планиране. Но ние бихме могли да започнем такова регресивно планиране също така и с всяка една от изброените други теореми. Има ли за някоя от тях известна вероятност да доведе до успех? За коя от тях тази вероятност е най-голяма? Ако не можем да отговорим на тези въпроси, ако отговорът, който те събуждат, е само известно неясно, несигурно чувство, изборът, пред който сме изправени, е наистина

съмнителен. Ние сме на кръстопът, трябва да правим избор между няколко пътя – началото на всеки от тях е доста ясно, но продължението е несигурно, а краят му е забулен в мъгла.

Целта на този пример беше само да накара читателя да схване объркаността, несигурността в избора между няколко плана. При такова положение съветът, който бих дал, е следният:

Не се увличайте твърде рано, не се увличайте в една насока повече, отколкото е необходимо. Вършете нещо, но не забравяйте за другите възможности.

Добрият “решавач” на задачи планира като добър генерал. Той разбира, че заплануваната атака може да се провали, и не пренебрегва тактиката на отстъплението. Един добър план трябва да притежава известна гъвкавост, известна приспособимост към непредвидени трудности.”

Съветът, даден от Дьорд Поја, е вече явно и осъзнато реализиран, много по-късно в [1], [2], [5], [14] и [20], цитирани в дипломната работа [12]. Между тези публикации ще си позволим да отбележим изрично и френския учебник от 1992 година [21], където нещата обаче са направени на чисто практическа основа, както това е правено в наши пособия през 60-те години на ХХ век. Това са учебници, статии, книги за учителя и др., в които постепенно се появяват, макар и стихийно, системи от начини за извършване на някои математически дейности, например за “равенство на отсечки”, “равенство на ъгли”, “успоредни прави” и др. на базата на сравнението и обобщението на опита в тези пособия и особено в монографията на проф. Иван Ганчев [2].

По-нататък ще изложим накратко примерна методика за създаване и прилагане в обучението по геометрия в 7 и 8 клас на ДСП и ДСНД.

Примерна методика за създаване и прилагане в обучението на ДСП и ДСНД

2. Технология за създаване на ДСП и ДСНД (тетрадка–справочник). Тук е моментът да покажем как всеки ученик с помощта на учителя си може да извърши систематизиране на знанията, което да му помогне да стане по-досетлив.

За целта е подходящо той да вземе празна тетрадка (тетрадка–справочник) с около 40–50 листа и за различните понятия да отдели по 2–3 страници. Например за “равенство на две отсечки” да отдели първите три страници, за “отсечка, по-голяма от отсечка”, да отдели следващите две страници, за “успоредност на две прави”, да отдели следващите три страници и т. н.

Как учителят може да подпомогне ученика при попълване на тетрадка–справочник?

Това може да стане по следния начин:

1. След изучаване на всяка теорема да се преценява за какво тя може да се използва;
2. След това да се припомнят други, познати вече теореми, с които може да се извърши същата дейност;
3. Новата теорема да се присъединява към старите, вече изучени теореми, с които може да се извършва същата дейност.

Това по принцип се прави устно само от някои учители по време на провеждането на отделни уроци. По-ефикасно е обаче, ако то се прави винаги и при това писмено, с активното участие на учениците. По този начин се осигурява систематизиране на теоремите по отношение на използването им.

Това систематизиране на теоремите за всяко понятие на практика може да започва така: След запознаване, например, с определението и една теорема-признак за успоредни прави, учителят казва на учениците:

“Досега се запознахме с определението за успоредни прави и с една теорема-признак. С тях може да познаваме, че две прави са успоредни. Затова като заглавие в тетрадката-справочник запишете “Признаци за успоредност на прави”, а като подзаглавие отбележете “*Две прави са успоредни, ако*”:

1) лежат в една равнина и нямат обща точка;
или

2) при пресичането им с трета права се получават равни кръстни ъгли.

След доказване на нови теореми-признаци, това сложно изречение се допълва с:
“или

3) при пресичането им с трета права се получават равни съответни ъгли;
или

4) при пресичането им с трета права се получават вътрешно прилежащи ъгли, сумата на които е два прави ъгъла.”

По аналогичен начин се постъпва за “равенство на отсечки”, “прав ъгъл”.

Тетрадката-справочник е предназначена за по-лесно и трайно запомняне на определения, теореми и тяхното използване при необходимост. Изготвянето на такава примерна тетрадка трябва да започне още от 7 клас и да продължи до края на обучението на ученика. Важно е ученикът, когато попълва тетрадката-справочник, да оставя винаги място за допълване при всяка тема от следващи знания, придобити в по-горни класове. Учениците трябва да свикнат ежедневно да я използват, но най-вече да знаят как.

3. Методика за използването на ДСП и ДСНД при работа в клас. За да се научат учениците да работят със системите от признаци, трябва учителят първоначално непрекъснато да им напомня за тетрадката-справочник, както за нейното попълване, така и за използването ѝ. Това той може да прави по време на провеждане на часа или чрез задаване на домашна работа. Теоремите, изучени в урока се записват на точно определено място в тетрадката-справочник. Резултатите от домашната работа над тетрадката-справочник трябва да се контролират от учителя през следващия час. Това трябва да продължава системно през цялото обучение по математика в 7. клас. В 8. клас учителят може да подсеща учениците да ползват тетрадката-справочник със системите от признаци. Тогава учениците в 9.-10. клас сами се насочват към използването на признаците, а попълването и използването на тетрадката-справочник става навик.

С помощта на учителя, учениците ще могат (използвайки тетрадката-справочник) да решават успешно задачи, дори да открият различни решения на една и съща задача. От друга страна, използването на тетрадката-справочник ги довежда до икономия на време и създава навик у учениците за търсене.

Прилагането на този подход, ще доведе до гарантирани, солидни и трайни знания и особено по математика.

4. Фиксиране на ДСП и ДСНД на хартиен и електронен вариант.

4.1. Фиксиране на хартиен вариант. Фиксирането на ДСП и ДСНД може да стане в предварително начертани колони и редове, като в посочените схеми на фиг. 4.1.

Съдържание на примерна СИСТЕМА ОТ ПРИЗНАЦИ		Съдържание на примерна СИСТЕМА ОТ НАЧИННИ ЗА ДЕЙНОСТИ	
СИСТЕМА ОТ ПРИЗНАЦИ За Равенство на отсечки		СИСТЕМА ОТ НАЧИННИ ЗА ДЕЙНОСТИ За Лице на триъгълник	
<p>2 Две отсечки, са равни:</p> <p>ако</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. са с равни дължини; 2. могат така да се наложат, че да съвпадат; 3. са (сборове или разлика) на равни отсечки или (от съответно равни събираеми); 4. са поотделно равни на трета отсечка (една и съща отсечка); <p>или др.</p>		<p>3 Лицето на триъгълника е равно на:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $\frac{ah_2}{2} = \frac{bh_1}{2} = \frac{ch_3}{2}$; 2. $\frac{ab}{2}$ - (Правоъгълен триъгълник); 3. $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$ - (Херонова формула); 4. $\frac{abc}{4R}$; <p>или др.</p>	

Фиг. 4.1

ЛЕГЕНДА: (на примерните системи от признаци и начините за дейности)

1. Заглавие на системата;
2. Начало на изречението;
3. На всеки от редовете се въвежда признака (ДУ);
4. На всеки от редовете се въвеждат начините за дейности.

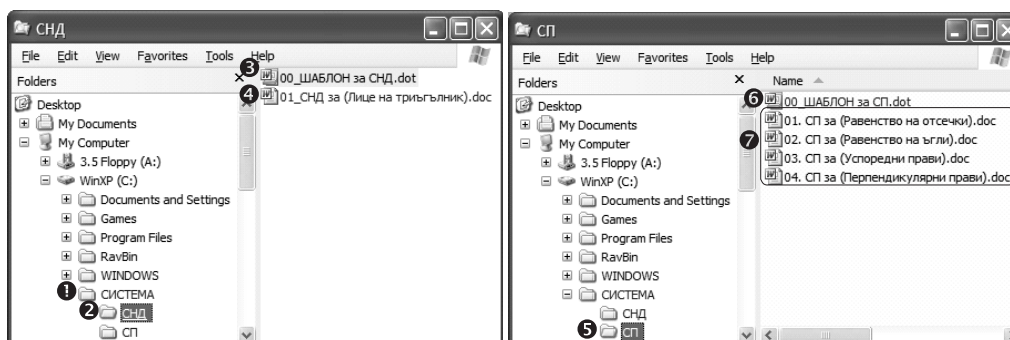
4.2. Фиксиране на електронен вариант* :

Електронният вариант може да се фиксира с различни програмни приложения. Едно от приложенията може да бъде текстообработваща програма WORD.

В WORD фиксирането на понятията може да се извършва в папка, наречена "СИСТЕМА" и под папки "СП" и "СНД". Добре е в тях да има шаблонни файлове с празна таблица за попълване на признаците и начините за извършване на различни математически действия, свързани със съответното понятие. Този файл може да бъде с име "ШАБЛОН" и да съдържа горепосочените таблици т.е. система от признаци (СП) и система от начини за действия (СНД). В WORD фиксирането на понятията може да се извършва в следната структура от подпапки и файлове за всяко отделно понятие, както е илюстрирано на фиг. 4.2.

Всяка СП (СНД) трябва да бъде фиксирана в отделен файл със съответното си име, като следната за равенство на отсечки "01. СП за (Равенство на отсечки).doc". Преди това трябва да се изпълни следната последователност – Да се отвори файла "00_ ШАБЛОН за СП.doc" и да се съхрани под новата СП. Празната таблица да се допълва при всяка изучена теорема или определение. Текстообработваща програма WORD предоставя всички необходими инструменти за

*Има се предвид за ученици, които имат необходимите знания и умения да работят с папки и файлове. По този начин се реализират между-предметни връзки.



Фиг. 4.2

ЛЕГЕНДА:

СИСТЕМА (папка със СП и СНД)

СНД (подпапка със система от начини за действие);

Шаблонен файл за СНД;

Файл с СНД;

СП (подпапка със система от признаци);

Шаблонен файл за СП;

Файлове със СП.

попълване на таблицата. Освен това предоставя възможност на ученика да разпечата СП (СНД) на хартия и да ги използва, (когато няма възможност да ползва компютър) по време на решаването на задачи.

От проведените интервюта, цитираните учебници, научни статии и книги се вижда, че ДСП са полезни и имат бъдеще. Пътят, изминат досега при създаването и използването на т. нар. от проф. Иван Ганчев ДСП, ДСС и ДСНД не е бил лесен, но в значителна степен е оригинален за Българската методика в обучението по математика.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Б. БОГДАНОВА. За целенасочено подпомагане на мисловната дейност на учениците. *Обучение по математика*, кн. 1 (1988), 33–38.
- [2] Ив. ГАНЧЕВ. За математическите задачи. София, 1971.
- [3] Ив. ГАНЧЕВ. Основни учебни дейности в урока по математика, синтез на резултати от различни изследвания, София, 1999.
- [4] Ив. ГАНЧЕВ, А. ЛАНГОВ и др. Геометрия за 8 клас на единното средно политехническо училище. София, 1980.
- [5] Ив. ГАНЧЕВ, Л. ПОРТЕВ, Б. БАЕВ, П. ТОДОРОВА. Методика на обучението по математика от 5.–7. клас. Пловдив, 1997.
- [6] Ив. ГАНЧЕВ., Ю. КОЛЯГИН, Й. КУЧИНОВ, Л. ПОРТЕВ, Ю. СИДОРОВ. Методика на обучението по математика от VIII до XI, I част. София, 1996.
- [7] Ив. ГАНЧЕВ., Ю. НИНОВА, В. НИКОВА. Методика на обучението по математика, обща част. Благоевград, 2002.
- [8] М. ДЕНКОВА. Описание на преговорния урок по геометрия в 7. клас на тема “Успоредник. Видове успоредници”. *Обучение по математика*, кн. 3 (1983), 35–38.

- [9] З. Запрянов, А. Лангов, Ив. Ганчев и др. Математика за 7 клас на единното средно политехническо училище. София, 1987.
- [10] З. Запрянов, Ю. Нинова, С. Матакиева, И. Шаркова. Справочник по математика 8-12 клас". София, 2002.
- [11] Г. Иванова, Ив. Ганчев. Четириъгълник – обобщителен урок. кн. 6, 1965, 22–25.
- [12] Б. Исмаилова-Исуfoва. Систематизирането на определенията и теоремите в обучението по геометрия. дипломна работа, СУ “Св. Климент Охридски”, ФМИ, 2009.
- [13] Ю. Нинова. Основните задачи за построение. София, 2007.
- [14] Ил. Ст. Пашов. Усвояване на математически понятия. *Обучение по математика*, кн. 2 (1976), 10–14.
- [15] Дъорд Пойа. Математическо откритие. София, 1968.
- [16] Л. Портев, Н. Николов. Методика на обучението по математика, кн. I. Обща методика, Пловдив, 1987.
- [17] Н. Райков. Някои пътища за формиране на система от математически знания и оптимизация на учебно-възпитателния процес. *Обучение по математика*, кн. 1 (1986), 37-41.
- [18] К. Славов, М. Колчев, Т. Стоилов. Обучението по планиметрия в VII и VIII клас на общообразователните трудово-политически училища. София, 1963.
- [19] З. Търсанкова. Систематизиране знанията на учениците по геометрия в 6.–7. клас". *Обучение по математика*, кн. 2 (1984), 44-46.
- [20] В. И. Цървенков, М. Колчев. Планиметрия за 8 клас на общообразователните трудово-политехнически училища. София, 1973.
- [21] В. GERARD, D. DAVIAUD, V. REVRANCHE. Pythagore, Mathematiques 4^e, HATIER, 1992.
- [22] I. GYUDZHENOV, IV. GANCHEV, S. GROZDEV. Logical, Practical and Psychological Roots of Certain Mathematical Operations. MASSEE International Congress on Mathematics MICOM 2009, Republic of Macedonia, Ohrid, 16–20 September 2009.

Бахсен Исмаилова-Исуfoва
 Ридван Исуфов
 СУ “Св. Климент Охридски”
 Факултет по математика и информатика
 Бул. Дж. Баучер № 5
 1164 София
 e-mail: bahsen@abv.bg
 ridvan@fmi.uni-sofia.bg

BIG IDEA – STILL LESS POPULAR

Bahsen Ismailova-Isufova, Ridvan Isufov

In this paper it is described the birth and the growth during the last 50 years of the idea for the systematization of definitions and theorems based on the activities which can be done with them. Also there are methods to include the personal computers in this activity and to continue the research of the role for extending the heuristics abilities of students.

Key words: Didactic System of Symptoms (DSS). Didactic System of Course of Action (DSCA).