МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2010
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2010
Proceedings of the Thirty Ninth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Albena, April 6–10, 2010

ХАРАКТЕРИСТИЧНИ СВОЙСТВА НА НЯКОИ МНОГОСТЕНИ

Пламен Пенчев

През 1980 г. на олимпиадата в Канада беше предложена следната задача:

Задача 1. *Паралелепипедът има следното свойство: произволно сечение, успоредно на негова стена, има периметър P равен на периметъра на тази стена. Съществуват ли други изпъкнали многостени с това свойство?*

Ще приложим един метод за решаване на тази задача, който може да се използва и при получаването на други резултати.

Нека допуснем, че съществува изпъкнал многостен M с посоченото свойство и α е една негова произволна стена $\alpha = (A_1A_2\dots A_n)$. Да построим две сечения $B_1B_2\dots B_n$ и $C_1C_2\dots C_n$, успоредни на α по такъв начин, че между тях и α няма други върхове на многостена. Страните на $A_1A_2\dots A_n$ означаваме с a_1, a_2, …, a_n, а успоредните им от двете сечения – съответно с b_1, b_2, …, b_n и c_1, c_2, …, c_n. Страните на сеченията, които не са успоредни на някоя страна на α (напр. B_2B_3 и C_2C_3), означаваме съответно с ℓ_i и m_i, $i = 1, 2, \dots, s$ (Черт. 1). Съгласно допускането $\sum\limits_{i=1}^{s} l_i + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = P$. Ако $\dfrac{A_1C_1}{A_1B_1} = k$,

$$c_i = kb_i + (1-k)a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{1}$$

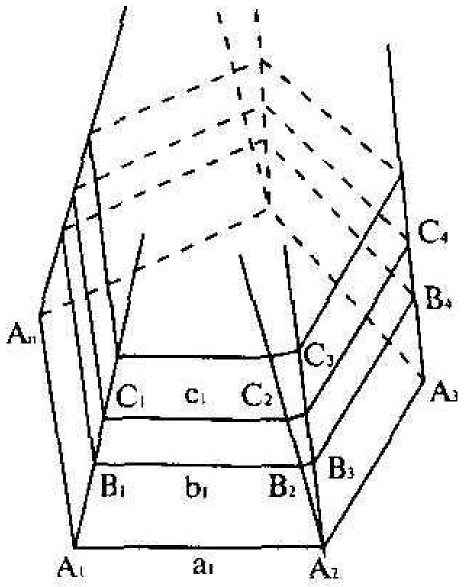
$m_j = kl_j$, $j = 1, 2, \dots s$. Тогава

$$\sum_{i=1}^{n} c_i + \sum_{j=1}^{s} m_j = \sum_{i=1}^{n} (1-k)a_i + \sum_{i=1}^{n} kb_i + \sum_{j-1}^{s} kl_j = (1-k)P + kP = P.$$

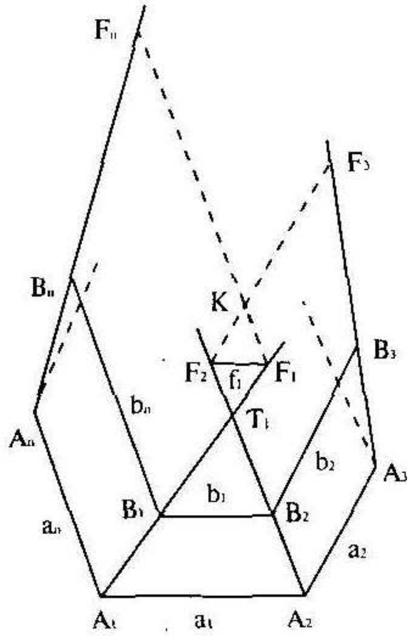
Да означим с L повърхнината, образувана от съседните за α стени. Получихме, че ако едно от сеченията на L с равнини, успоредни на α, има периметър, равен на периметъра на α, то всички сечения на L имат същия периметър.

Нека сега T_1 е най-близкият връх на M. Да допуснем, че има връх T_2, който се намира на по-голямо разстояние до α от T_1. Ако между тези два върха прекараме равнина $\beta \,\|\, \alpha$, то сечението на β с многостена M ще бъде изпъкнал многоъгълник, който се съдържа в многоъгълника, представляващ сечението на β с L. Това означава, че сечението на β с M ще има по-малък периметър от α.

Следователно всички върхове на M, нележащи на α, лежат в равнина, успоредна на α. Тъй като това се отнася за всяка друга стена на M, лесно се установява, че всяка от стените му има не повече от четири върха. С непосредствена проверка се



Черт. 1



Черт. 2

намира, че освен паралелепипеда, и правилният октаедър притежава посоченото свойство.

Да направим една бележка по решението на тази задача. В равенство (1) могат да настъпят промени, ако върхът T_1 образува с някой ръб на α триъгълна стена и да настъпят промени и в свойствата на сеченията на L. Да покажем, че в този случай крайните изводи не се променят. Прекарваме сечение $\{F_1F_2\dots F_n\}$, успоредно на α, като върхът T_1 (Черт. 2) е единственият връх на M между това сечение и α. Ако положим $\dfrac{A_1F_1}{A_1B_1} = k$, отново имаме $f_i = (1-k)\vec{a}_i + k\vec{b}_i$, $i = 2, 3, \dots, n$, $f_i = (1-k)\vec{a}_i + k\vec{b}_i = -[(1-k)\vec{a}_1 + k\vec{b}_1]$. Означаваме с P' периметъра на $F_1F_2\dots F_n$, изключвайки отсечката $F_1F_2 = \mathrm{f}_i$. Тогава

$$P' = \sum_{i=2}^{s} f_i = (1-k)\sum_{i=2}^{n} a_i + k\sum_{i=2}^{n} b_i = P - [(1-k)a_1 + kb_1] = P + f_1$$

От друга страна за ΔKF_2F_1 е изпълнено $KF_2 + KF_1 > F_1F_2$. Следователно, ако P'' е периметърът на многоъгълника $KF_3\dots F_n$, то $P'' = P' - KF_1 - KF_2 < P$. Но сечението на M с равнината $(F_1F_2F_n)$ е изпъкнал многоъгълник, съдържащ се в многоъгълника $KF_3\dots F_n$, т.е. неговият периметър е по-малък от P. Случаят, когато има няколко върха, имащи свойството на T_1, е аналогичен.

Твърдението в тази задача по естествен път предполага поставянето и на други подобни задачи.

Задача 2. *Да се намерят всички изпъкнали многостени M такива, че каквото и сечение да прекараме, успоредно на произволна стена M, то сечението и стената са равнолицеви.*

Решение. При решаването на тази задача ще използваме следното

Твърдение 1. *Ако M е произволен изпъкнал многостен с n стени, S_1, S_2, ..., S_n са съответните им лица, $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \ldots, \vec{S}_n$ са вектори, перпендикулярни на съответната стена и насочени навън от многостена, такива че $\left|\vec{S}_i\right| = S_i$, за $i = 1, 2, \ldots, n$, то $\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \cdots + \vec{S}_n = 0$.*

Да допълним означенията от предната задача, като лицата на стените от вида $A_1A_2B_2B_1$ и $A_1A_2C_2C_1$ ще означим съответно с S_i и S_i, а лицата на стените от вида $A_2B_3B_2$ и $A_2C_3C_2$ – съответно с P_i и P'_j, $j = 1, 2, \ldots, s$. Векторите, съответстващи на тези стени, означаваме съответно с $\vec{S}_i$, $\vec{S}'_i$, $\vec{P}_j$ и $\vec{P}'_j$.

Като приложим Твърдение 1 за многостените $A_1A_2 \ldots A_nB_1B_2 \ldots B_k$ и $A_1A_2 \ldots A_nC_1C_2 \ldots C_k$, получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{S}_i + \sum_{j=1}^{s} \vec{P}_j = 0, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{S'}_i + \sum_{j=1}^{s} \vec{P'}_j = 0. \tag{3}$$

Освен това

$$\vec{S'}_i = k\frac{(2-k)a_i + kb_i}{a_i + b_i}\vec{S}_i \quad \text{и} \quad \vec{P'}_j = k^2\vec{P}_j, \quad \sum_{j=1}^{1} \vec{P}_j = -\sum_{i=1}^{n} \vec{S}_i.$$

Заместваме в (3) и след преработка получаваме:

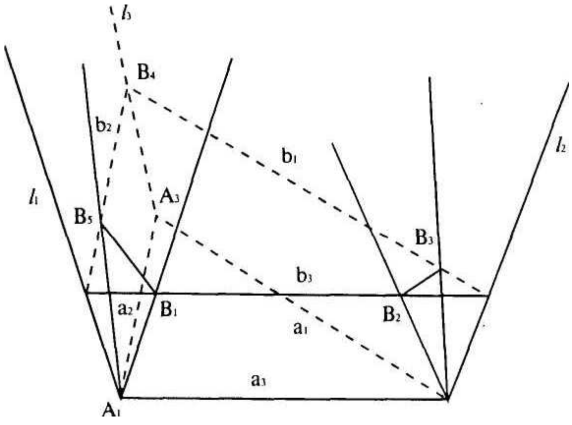
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + b_i}\vec{S}_i = 0. \tag{4}$$

От равенство (4) може да се направи извод, че ако едно сечение на повърхнината L с равнина, успоредна на $A_1A_2 \ldots A_n$ има същото лице, то и останалите такива сечения имат същото лице и решението на задачата не се различава по същество от това на Задача 1. В крайна сметка обаче само паралелепипедът има исканото свойство.

Както и в Задача 1, част от изводите, направени по-горе, няма да са в сила само при условие, че някой ръб на стената $A_1A_2 \ldots A_n$ образува триъгълна стена с връх T_1. Да покажем, че многостен с показаното свойство не може да има триъгълни стени (Черт 3). Съгласно равенство (4)

$$\frac{a_1}{a_1 + b_1}\vec{S}_1 + \frac{a_2}{a_2 + b_2}\vec{S}_2 + \frac{a_3}{a_3 + b_3}\vec{S}_3 = 0. \tag{5}$$

Равенството (5) означава, че векторите $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ и $\vec{S}_3$ са компланарни, откъдето следва, че $\ell_1 \,\|(A_3A_2B_3B_4)$, $\ell_2 \,\|(A_1A_3B_4B_5)$ и $\ell_1 \,\|(A_1A_2B_1B_2)$, където ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 са пресечници на съответните двойки стени на многостена. Не е трудно да се забележи, че L съвпада с призматичната повърхнина, образувана от $(\mathrm{A_1A_2A_3})$ и правите ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, но многостените от този вид не притежават исканото свойство.



Черт. 3

Задача 3. *Да се намерят всички изпъкнали многостени M със свойството: Ако a е произволна стена на M, то всеки две равнини $\alpha_1 \| \alpha$ и $\alpha_2 \| \alpha$ отсичат от M многостени, чиито обеми са пропорционални на разстоянията от α_1 и α_2.*

Решение. Да използваме следното

Твърдение 2. *Ако M е многостен, върховете на който са разположени върху две успоредни равнини, то е в сила равенството:*

$$V = \frac{1}{6}(S_1 + S_2 + 4S)h, \tag{6}$$

където S_1 и S_2 са лицата на двете успоредни стени, h е разстоянието между тях, а S е лицето на сечението, което е успоредно на двете стени и разполовява разстоянието h.

Отново използваме Черт. 1. Нека S_1, S_2 и S_3 са лицата на стените $\alpha = A_1A_2\dots A_n$, $\beta = B_1B_2\dots B_k$ и $y = C_1C_2\dots C_k$, h_1 е разстоянието между α и β, h_2 – между α и γ, а S_{12} и S_{13} са лицата на сеченията, успоредни на α и разполовяващи съответно h_1 и h_2.

Ако V_1 и V_2 са обемите на отсечените тела, то

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(S_1 + S_2 + 4S_{12})h_1}{(S_1 + S_3 + 4S_{13})h_2} = \frac{h_1}{h_2}, \quad \text{т.е.}$$

$$S_2 + 4S_{12} = S_3 + 4S_{13}. \tag{7}$$

Нека δ е произволна равнина, успоредна на α. Разстоянията от α, β и γ до δ да означим съответно с h, h_1', и h_2', а обемите на многостените, заключени между двойките равнини съответно – (α,β), (β,δ) и (γ,δ) с V, V_1' и V_2'. Имаме: $h_1' = h_1 - h$, $h_2^i = h_2 - h$, $V_1^i = V_1 - V$ и $V_2^i = V_2 - V$. Тогава:

$$\frac{V_1'}{V_2'} = \frac{V_1 - V}{V_2' - V} = \frac{V\dfrac{h_1}{h} - V}{V\dfrac{h_2}{h} - V} = \frac{h_1 - h}{h_2 - h} = \frac{h_1'}{h_2'}$$

Да прекараме две нови равнини β' и γ' съответно с лица S_1' и S_2' така, че разстоянията между двойките равнини (β, β') и (γ, γ') да са равни. Тогава равнината δ можем да изберем така, че сеченията с лица S_{12} и S_{13} да разполовяват и разстоянията (β', δ) и (γ', δ). Аналогично на равенството (7) получаваме:

(8) $$S_2' + 4S_{12} = S_3' + 4S_{13} \quad \text{или}$$

(9) $$S_2 - S_3 = S_2' - S_3'.$$

Ако $X \parallel \alpha$ е произволно сечение на многостена с лице S и разстояние h до α, да означим $S = f(h)$, т.е. разглеждаме лицата на сеченията като функция на разстоянията им до α. Може да се докаже, че $f(h)$ е непрекъсната функция на h. Използвайки равенство (9), не е трудно да се види, че ако числата a, b и c образуват аритметична прогресия, то същото се отнася и за числата $f(a)$, $f(b)$ и $f(c)$ и, следователно, задачата се свежда до определянето на $f(h)$.

Нека първо да считаме, че $f(0) = 0$. Да разгледаме числата $x-y$, $x, x+y$. Тогава

(10) $$f(x-y) + f(x+y) = 2f(x).$$

Ако $x = y$ и получаваме: $f(2x) = 2f(x)$. Равенството (10) придобива вида:

(11) $$f(x-y) + f(x+y) = 2f(x) = f(2x) = f((x-y) + (x+y)).$$

Ако $x - y = u$, $x + y = v$, то

(12) $$f(u) + f(v) = f(u+v).$$

Това е познатото уравнение на Коши и, следователно, $f(x) = px$, където p е константа. Сега ако $f(0) = S_1/S_1$ е лицето на α, то $f(h) = ph + S_1$, заместваме в (7) и получаваме:

$$Ph_1 + S_1 + 4p\frac{h_1}{2} + 4S_1 = ph_2 + S_1 + 4p\frac{h_2}{2} + 4S_1,$$

$3ph_1 = 3ph_2$, или $3p(h_1 - h_2) = 0$, откъдето поради $h_1 \neq h_2$ следва, че $p = 0$. Следователно, $f(h) = S_1$ и дадената задача се свежда до Задача 2.

Пламен Пенчев
ПМГ "Иван Вазов"
Добрич, България
e-mail: antonov@pmg.dobrich.net

CHARACTERISTIC PROPERTIES OF SOME POLYHEDRA

Plamen Penchev

The origin is a problem from the Canadian Mathematical Olympiad in 1980, which is solved in general and ended to similar variants. Certain characteristic properties of such polyhedra are investigated.