

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2014  
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2014  
*Proceedings of the Forty Third Spring Conference  
of the Union of Bulgarian Mathematicians  
Borovetz, April 2–6, 2014*

РАЗВИВАНЕ НА КЛЮЧОВИ КОМПЕТЕНТНОСТИ  
ЧРЕЗ ОБРАЗОВАНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА:  
ЕВРОПЕЙСКИЯТ ПРОЕКТ *KeyCoMath*\*<sup>†</sup>

Петър Кендеров, Евгения Сендова, Тони Чехларова



На 18 декември 2006 г. Европейският парламент и Съветът на Европейския съюз приеха **Препоръки** относно ключовите компетентности, необходими за удовлетворителна личностна и социална реализация в бъдещото общество, основано на знанието. Този документ, станал известен като „Референтна рамка за ключовите компетентности“ [1], има за идентификатор съкращението 2006/962/ЕС и може да се намери в системата EUR-Lex, като в полетата за търсене се зададе годината 2006 и номер 962. В тази референтна рамка са обособени следните осем групи от умения, знания и способности, по-общо – компетентности. (В скоби е дадена оригиналната формулировка на английски, а преводът на български е на авторите):

1. Комуникация на роден език (Communication in the mother tongue);
2. Комуникация на чужди езици (Communication in foreign languages);
3. Математическа компетентност и основни компетентности в областта на природните науки и технологиите (Mathematical competence and basic competences in science and technology);
4. Дигитална компетентност (Digital competence);
5. Умение за самостоятелно учене (Learning to learn);
6. Социални и граждански компетентности (Social and civic competences);
7. Усет за инициатива и предприемачество (Sense of initiative and entrepreneurship);

---

\*Comenius Multilateral Project: Developing Key Competences by Mathematics Education Project  
Reference: 538319-LLP-1-2013-1-DE-COMENIUS-CMP.

<sup>†</sup>Изразените в тази статия становища и мнения са на авторите и не обвързват по никакъв начин и с никакви отговорности Комисията и другите органи на Европейския съюз

8. Усет за (и подobaващо отношение към) културата и към извяването (Cultural awareness and expression).

Ясно е, че притежаването на тези компетентности е добра основа за реализация на пълноценен живот – и в обществен, и в личностен план. Умението за самостоятелно учене, придружено с математическа и дигитална грамотност, дава добра основа за професионална мобилност и за лесна адаптация към бързо променящите се нужди на пазара и производството. Това намалява опасността от безработица. Добавянето и на комуникационните и на социалните компетентности открива възможност за пълноценна обществена реализация на личността като активен и отговорен гражданин с рационално поведение в обществото. Формирането и развиването на тези компетентности е продължителен процес. Той обхваща целия съзнателен живот, но училищното образование има основополагаща роля в него. Характерната особеност тук е, че усвояването на тези компетентности не става пряко, чрез изучаване на отделен учебен предмет по всяка компетентност, а е по-скоро резултат от наслагването на редица образователни и възпитателни въздействия, разпръснати във всички учебни предмети, както и в цялостния процес на учене (в училище и извън него).

Целта на Европейския проект *KeyCoMath* е да покаже как образованието по математика може да допринесе за формирането, развитието и затвърдяването на шест от тези компетентности у отделния ученик. Проектът е насочен предимно към разпространение на такова образование по математика, което се основава на изследователския подход, на самостоятелната работа на учениците, на връзката с природните науки и технологиите, на активното участие на ученика в учебния процес, на развиването на математическо мислене и на правилното интерпретиране на числовата и графична информация, която ни съпровожда в ежедневието и влияе върху поведението ни. Всичко това допринася за развиване на **математическата компетентност**. Предвижда се изучаването на математиката в такъв стил да е съпроводено с интензивна комуникация между учениците (в устен и/или писмен вид), в процеса на която да се представят и обсъждат математически идеи, да се предлагат и отхвърлят хипотези, да се събират и организират данни и наблюдения, да се развива критично мислене и способност да се представят аргументи, да се убеждават другите със силата на логиката. По такъв начин се развиват и укрепват **комуникативните умения** и способността за работа в екип, която е една от важните съставки на **социалните и граждански компетентности**. Доколкото този стил на образование по необходимост включва образователни среди, наситени със (и основани на) дигитални медии – софтуер за динамична математика, за електронни таблици, за компютърна алгебра, за компютърни симулации – учениците неусетно развиват сериозна **дигитална компетентност** с по-дълбоко разбиране за възможностите, както и за ограниченията на съвременните дигитални технологии. Нещо повече, неусетно се развива и алгоритмичното мислене, което е в основата на програмирането и на цялата информатика.

Резултатността на изследователския подход в образованието произтича от самостоятелната работа на учениците (индивидуално или на групи). По такъв начин те развиват **умения за самостоятелно учене** с разбиране на същността на нещата, с критично отношение към наученото. Едновременно с това, укрепва и навикът човек

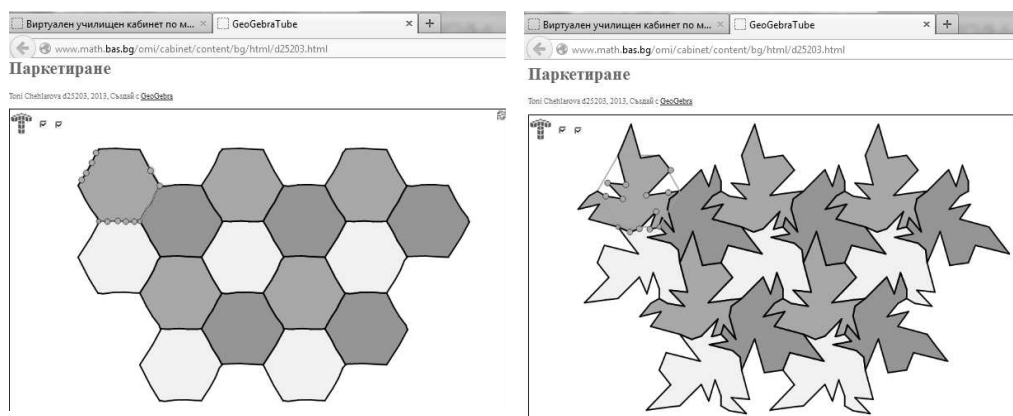
сам да достига до ново знание, до нови умения, било като използва досегашните си знания, било като се допита до някого – интернет търсачка, специалист или други членове на социалните групи, в които участва. Ученето в изследователски стил развива и инициативността. Новите образователни среди, основани на съвременните софтуерни системи, позволяват и поощряват проучването и изследването чрез експериментирание, чрез изпробването на нови и нови възможности. Те подтикват към новаторство, към желание да се проверят и реализират идеите, а тъкмо подобно поведение е характерна черта на **инициативността и предприемчивостта**. По този начин се изграждат навици за планиране, организиране и управление на дейности, което е от полза при професионалната реализация във всяка сфера на дейност.

Макар това да не е поставено като задача в проекта KeyCoMath, култивирането и на останалите две компетентности (**комуникиране на чужд език и подoba-ващо отношение към културата**) също може да получи положителен импулс чрез математическото образование. В момента светът разполага с огромно разнообразие от достъпни образователни среди на различни езици, като английският език е най-застъпен. Усвояването, използването и създаването на такива среди неусетно и неминуемо подобрява познанията по чужди езици и допринася за разширяването на културния кръгосор. Редица произведения на изкуството дължат въздействието си в значителна степен на закодираните в тях математически факти и явления (симетрия, перспектива, композиция и др.). Има много примери на влияние и в обратната посока – чрез произведенията на изкуството да се представят и възприемат математически факти и явления. По този начин се постига и положителна промяна в обществените нагласи спрямо образованието по математика като цяло. Един характерен пример за това, какво може да направи изкуството за засилване на привлекателността на образованието по математика, възникна в резултат на дългогодишно сътрудничество между швейцарския художник Ойген Йост и проф. Петер Баптист от Университета в Байройт, Германия [2]. Много от картините на Йост носят на пръв поглед странни имена като „Средиземноморска геометрия“, „Разходка с г-н Ойлер“, „Таксито на Харди“, „Пица, Кембридж, Берн“ и др. Във всяка от тези картини обаче са изобразени сюжети, които са дълбоко свързани с математиката. Нещо повече, това е направено по начин, който събужда интереса към математиката и предизвиква естетическа наслада. Рисунките на Йост демонстрират убедително, че много от математическите символи, конструкции и обекти, с които отдавна сме свикнали, са вече част от културното наследство на нашата цивилизация и ще се радват на внимание и в бъдеще. Например, картината на Йост (Фиг. 1), която е публикувана на сайта на Швейцарското математическо общество [3], изобразява три магически квадрата аранжирани в стил „Питагорова теорема“.

Числото във всяка от клетките на тези магически квадрати е представено чрез графичен символ/мотив, който е свързан по някакъв начин с това число. Учениците могат да бъдат поканени да отгатнат съответните числа, които се крият зад графичните символи/мотиви. Преодоляването на такова предизвикателство от страна на учениците не само индуцира фамилиарност с числата и техните свойства, но и разкрива връзки с историята и с приложенията на математиката. Като студентка в Университета в Байройт, Елфи Петерих разработва интерактивна версия на магически квадрат на Йост. В тази версия (която може да се изтегли от [4]) учениците отгатват и попълват числата в клетките на магически квадрат  $7 \times 7$ , като се

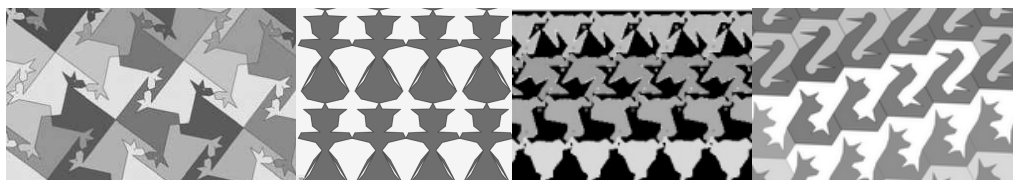


ученикът може да мести чрез „влачене“. Всяко преместване на такава точка предизвиква преместване на съответната (при някаква геометрична трансформация) точка във всяка от другите плочки.



Фиг. 2. Компютърна среда за динамично паркетиране на равнината и ешеризация

Художествените идеи на учениците често надминават тези на учителите им по математика и изненадват учителите им по рисуване, както се вижда от разработките на учениците на Елисавета Стефанова (73. СОУ „Владислав Граматик“, София). Впечатляващото тук в работата на петокласниците е не само, че разбират математиката, на която се основава паркетирането. Те *правят* математика, защото сами откриват правило, по което да реализират *метаморфози* в стила на Ешер (последните две на Фиг. 3), и то динамични! Нещо повече, те предават новите си компетентности на по-малките си съученици[11].



Фиг. 3. Мозайки и метаморфози в стила на Ешер, реализирани от ученици на Е. Стефанова

Тези и много други примери убедително показват, че чрез подходящо образование по математика могат да се развиват и укрепват всички ключови компетентности, посочени в европейската референтна рамка на компетенциите. Тъкмо това е основната идея на проекта *KeyCoMath*.

Работата по този проект ще продължи две години – от декември 2013 до декември 2015. Ще бъдат разработени, тествани и разпространени в Европа различни дидактически концепции, материали за учители и за ученици, образователни среди, които целят развитие и укрепване на ключовите компетентности на учениците от

началното и средното училище. Това предполага промяна в начина на преподаване и в начина на учене на математиката, както и промяна в методите за оценка на знанията. Има основание да се очаква, че промяната ще доведе и до повишаване на успеваемостта на изоставащите ученици. Накрая, но не и на последно място по важност, използването във всяка от страните-участници в проекта на разработените от другите партньори образователни среди и подходи ще спомогне за намиране на общ европейски път към решаване на проблемите пред европейската образователна система.

Основните дейности, свързани с реализацията на проекта, са представени в сайта на проекта [12]. Освен пряко за работа в училище, създадените дидактически концепции, образователни среди и други материали ще бъдат използвани при подготовката на бъдещите учители, както и при допълнителната квалификация на действащите в момента преподаватели. От особена важност за успеха на проекта е промените да бъдат подкрепени от образователните власти и от органите, които вземат главните решения в областта на образованието и науката.

Партньори-съизпълнители в проекта *KeyCoMath* са: Университетът в Байройт (Германия), <http://www.math.bas.bg/> Институтът по математика и информатика на БАН, Университетът в Южна Бохемия (Чехия), Университетът в Берген (Норвегия), Университетът в Кипър, Университетът в Клагенфурт (Австрия), Немският отдел за образование в Южен Тирол (Италия) и Училището Ротеншвил в Швейцария. Част от съизпълнителите вече са били партньори при изпълнението на други европейски проекти (*InnoMathEd*, *Fibonacci*) със сродна насоченост. Координатор на проекта е проф. Фолкер Улм от Университета в Байройт.

**Благодарности.** Авторите считат за свой приятен дълг да отбележат благодарността си към Европейския съюз, към неговата програма за „Учене през целия живот“ и нейната част „Коменски“, за финансовата поддръжка при реализацията на проекта.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Recommendation of the European Parliament and of the Council of 18 December 2006 on key competences for lifelong learning, (2006/962/EC), <http://new.eur-lex.europa.eu/homepage.html?locale=en/> (последно посещение 14.02.2014).
- [2] Everything is number (Всичко е число), [www.mathematik-und-kunst.de](http://www.mathematik-und-kunst.de) (последно посещение 14.02.2014).
- [3] Швейцарско математическо общество, <http://www.math.ch/index2011.php> (последно посещение 14.02.2014).
- [4] Дигитален магически квадрат, <http://www.lehrer-online.de/magisches-quadrat-digital.php?sid=70547637353175100137473897389460> (последно посещение 14.02.2014).
- [5] The Mathematical Art of M.C. Escher, <http://www.youtube.com/watch?v=Kcc56fRtrKU/> (последно посещение 14.02.2014).
- [6] С. КАПЛАН. Escherization, <http://www.cgl.uwaterloo.ca/~csk/projects/escherization/> (последно посещение 14.02.2014).

- [7] D. SCHATTSCHNEIDER. The Mathematical Side of M. C. Escher. In: The Best Writing on Mathematics (Ed. M. Pitić), Princeton University Press, 2011, 121–149.
- [8] Т. ЧЕХЛАРОВА, Е. СЕНДОВА. Динамично паркетиране. *Математика и информатика*, бр. 6, 2011, 5–17, ISSN 1310-2230.
- [9] Виртуален училищен кабинет по математика, <http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d25203.html> (последно посещение 14.02.2014).
- [10] V. ULM. IBME in Schools: Overview and Examples in International Contexts. In: Implementing Inquiry in Mathematics Education (Eds P. Baptist, D. Raab), Bayreuth 2012, 71 pp., ISBN 978-3-00-040752-9.
- [11] Т. ЧЕХЛАРОВА, Е. СЕНДОВА, Е. СТЕФАНОВА. Dynamic tessellations in support of the inquiry-based learning of mathematics and arts. In: Theory, Practice and Impact, Proceedings of Constructionism 2012, Athens, (Eds C. Kynigos, J. Clayson, N. Yiannoutsou), August 21–25, 2012, 570–574, ISBN: 978-960-88298-3-1.
- [12] Проектът *KeyCoMath*, <http://keycomath.eu/> (последно посещение 14.02.2014)

Петър Кендеров

e-mail: [kenderovp@cc.bas.bg](mailto:kenderovp@cc.bas.bg)

Евгения Сендова

e-mail: [jenny@math.bas.bg](mailto:jenny@math.bas.bg)

Тони Чехларова

e-mail: [toni.chehlarova@math.bas.bg](mailto:toni.chehlarova@math.bas.bg)

Институт по математика и информатика

Българска академия на науките

ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8

1113 София

## DEVELOPING KEY COMPETENCES BY MATHEMATICS EDUCATION. THE EUROPEAN PROJECT *KEYCOMATH*

**Petar Kenderov, Evgenia Sendova, Toni Chehlarova**

The key competences for lifelong learning as formulated in the *Recommendation of the European Parliament and of the Council of 18 December 2006 on key competences for lifelong learning* (2006/962/EC), include: *communication in the mother tongue; communication in foreign languages; mathematical competence and basic competences in science and technology; digital competence; learning to learn; social and civic competences; sense of initiative and entrepreneurship; cultural awareness and expression*. The education is the most important tool to cultivate these competences. The Project “Developing Key Competences by Mathematics Education” (*KeyCoMath*) is a Comenius Multilateral Project with reference identifier *538319-LLP-1-2013-1-DE-COMENIUS-CMP*. The major goal of this project is to develop didactical concepts, strategies and materials that enhance the development of the mentioned competences through mathematics education. For more information the reader is referred to the official site of the project <http://keycomath.eu/>.