

## НЯКОЛКО СВОЙСТВА НА СИМСЪНОВИТЕ ПРАВИ, СВЪРЗВАНИ С ОЙЛЕРОВИ КРИВИ

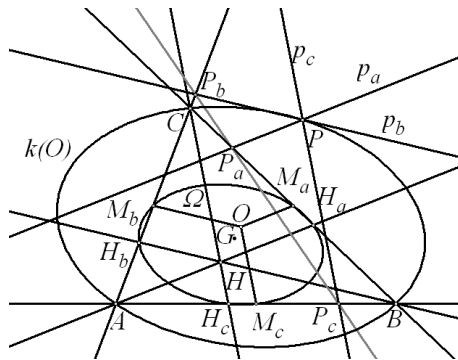
Сава Гроздев, Веселин Ненков

Статията разглежда редица свойства на аналози на Симсънова права и на Ойлеровата окръжност, свързани с криви от втора степен, които са описани около даден триъгълник.

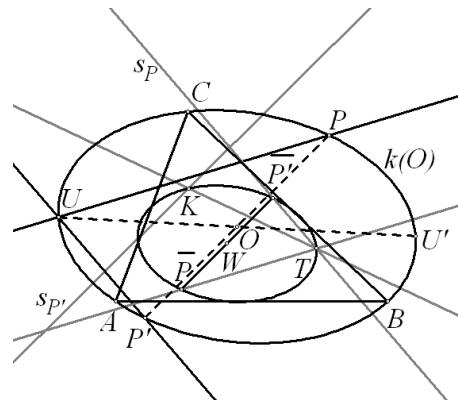
Използването на динамичен софтуер се превърна в традиционен инструмент за изучаване и преподаване на различни геометрични понятия и твърдения. Съвременните изследвания в областта на Евклидовата геометрия се извършват както с превърналите се в класика софтуерни продукти от рода на GeoGebra [1], така и с по-нови като Sam [2] и [3], Discoverer [4] и др. Настоящата статия е посветена на възможността да се прилага друг динамичен геометричен софтуер, наречен “THE GEOMETER’S SKETCHPAD” (GSP). Получено е обобщение на една класическа теорема от геометрията на триъгълника. С помощта на GSP е осъществено изследване на една обща конфигурация, в резултат на което са открити редица интересни нейни свойства.

Добре познатата конструкция от геометрията на триъгълника, когато на всяка точка от описаната за даден триъгълник окръжност се съпоставя една права, наречена Симсънова права [5], може да се обобщи за точките от произволно описано около триъгълника централно конично сечение по следния начин: Нека за произволен  $\triangle ABC$  точките  $M_a$ ,  $M_b$  и  $M_c$  са средите съответно на страните  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ , а  $\bar{k}(O)$  е елипса или хипербола с център  $O$ , която е описана около  $\triangle ABC$  и  $O \notin \{M_a, M_b, M_c\}$ . Ако  $P$  е произволна точка от равнината на  $\triangle ABC$ , построяваме правите  $p_a$ ,  $p_b$  и  $p_c$ , които минават през  $P$  и са успоредни съответно на  $OM_a$ ,  $OM_b$  и  $OM_c$ . С помощта на правите  $p_a$ ,  $p_b$  и  $p_c$  определяме точките  $P_a = p_a \cap BC$ ,  $P_b = p_b \cap CA$  и  $P_c = p_c \cap AB$  (фиг. 1). В [6] е показано, че  $P_a$ ,  $P_b$  и  $P_c$  лежат на една права  $s_P$  тогава и само тогава, когато  $P$  лежи на  $\bar{k}(O)$ . Имайки предвид класическия случай, естествено е да наречем правата  $s_P$  *Симсънова права на точката  $P$  спрямо  $\triangle ABC$  и кривата  $\bar{k}(O)$* .

Класическите Симсънови прави за  $\triangle ABC$  притежават редица интересни свойства, които са свързани с Ойлеровата окръжност на  $\triangle ABC$  [5]. Някои от тези свойства са пренасят по естествен начин върху току-що представеното тяхно обобщение. Тези свойства са свързани с една специална крива  $\Omega$ , която е еднозначно определена от центъра на  $\bar{k}(O)$ . Кривата  $\Omega$  се дефинира по следния начин: Нека  $G$  е медицентърът на  $\triangle ABC$ , а  $H$  е точка в равнината на  $\triangle ABC$ , за която е изпълнено векторното



Фиг. 1



Фиг. 2

равенство  $\overrightarrow{GH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$ . Ако  $AH \cap BC = H_a$ ,  $BH \cap CA = H_b$  и  $CH \cap AB = H_c$ , то точките  $H_a, H_b, H_c, M_a, M_b, M_c$  и средите на отсечките  $AH, BH$  и  $CH$  лежат на една крива от втора степен  $\Omega$ , която наричаме *Ойлерова крива на  $\Delta ABC$ , асоциирана с  $\bar{k}(O)$*  [7] (фиг. 1). Кривата  $\Omega$ , както е показано в [7], се получава от  $\bar{k}(O)$  при хомотетия  $h$  с център  $G$  и коефициент  $-\frac{1}{2}$ .

Нека сега  $P$  е произволна точка от  $\bar{k}(O)$ , а  $P'$  е нейната диаметрално противоположна върху  $\bar{k}(O)$ . Наблюденията с помощта на GSP върху поведението на съответните Симсънови прави  $s_P$  и  $s_{P'}$  при движението на  $P$  върху  $\bar{k}(O)$  насочват към формулирането на следните свойства:

**Свойство 1.** Симсъновите прави  $s_P$  и  $s_{P'}$ , съответно на точките  $P$  и  $P'$ , се пресичат в точка  $T$  от Ойлеровата крива  $\Omega$  (фиг. 2).

**Свойство 2.** Ако вторите пресечни точки на  $s_P$  и  $s_{P'}$  с  $\Omega$  са съответно  $\bar{P}'$  и  $\bar{P}$ , то тези точки са диаметрално противоположни върху  $\Omega$  (фиг. 2).

**Свойство 3.** Точките  $\bar{P}$  и  $\bar{P}'$  са хомотетични съответно на  $P$  и  $P'$  при  $h$ .

**Свойство 4.** Ако  $p$  и  $p'$  са прави, минаващи съответно през точките  $P$  и  $P'$ , така че  $p \parallel s_{P'}$  и  $p' \parallel s_P$ , те се пресичат в точка  $U$  от  $\bar{k}(O)$  (фиг. 2).

**Свойство 5.** Симсъновата права  $s_U$  на точката  $U$  е успоредна на диаметъра  $PP'$  на  $\bar{k}(O)$  (фиг. 2).

**Свойство 6.** Ако точката  $U'$  е диаметрално противоположната на  $U$  върху  $\bar{k}(O)$ , то Симсъновата ѝ права  $s_{U'}$  минава през  $T$  (фиг. 2).

**Свойство 7.** Симсъновите правите  $s_P$  и  $s_{P'}$  принадлежат на спрегнати спрямо  $\Omega$  и  $\bar{k}(O)$  направления.

За да докажем наблюдаваните свойства на Симсъновите прави, разглеждаме барицентрични координати спрямо  $\Delta ABC$  [8], като  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$ ,  $O(x_0, y_0, z_0)$  ( $x_0 + y_0 + z_0 = 1$ ),  $P(\lambda, \mu, \nu)$  ( $\lambda + \mu + \nu = 1$ ) и  $P'(2x_0 - \lambda, 2y_0 - \mu, 2z_0 - \nu)$ . Освен това, уравненията на кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\Omega$  са съответно:

$$(1) \quad \bar{k}(O) : (1 - 2x_0)x_0yz + (1 - 2y_0)y_0zx + (1 - 2z_0)z_0xy = 0 \quad [6],$$

$$(2) \quad \Omega : x_0(1 - 2x_0)(1 - 2x)x + y_0(1 - 2y_0)(1 - 2y)y + z_0(1 - 2z_0)(1 - 2z)z = 0 \quad [6].$$

От (1) непосредствено следва равенството:

$$(3) \quad (1 - 2x_0)x_0\mu\nu + (1 - 2y_0)y_0\nu\lambda + (1 - 2z_0)z_0\lambda\mu = 0.$$

От резултатите в [6], следва, че координатите на точките  $P_a$ ,  $P_b$  и  $P_c$  се изразяват по следния начин:

$$(4) \quad \begin{aligned} P_a & \left( 0, \frac{2\mu x_0 + \lambda(1 - 2y_0)}{2x_0}, \frac{2\nu x_0 + \lambda(1 - 2z_0)}{2x_0} \right), \\ P_b & \left( \frac{2\lambda y_0 + \mu(1 - 2x_0)}{2y_0}, 0, \frac{2\nu y_0 + \mu(1 - 2z_0)}{2y_0} \right), \\ P_c & \left( \frac{2\lambda z_0 + \nu(1 - 2x_0)}{2z_0}, \frac{2\mu z_0 + \nu(1 - 2y_0)}{2z_0}, 0 \right). \end{aligned}$$

От (4), като използваме (3), получаваме, че векторът

$$(5) \quad \vec{p}_0 (\lambda(\nu y_0 - \mu z_0), \mu(\lambda z_0 - \nu x_0), \nu(\mu x_0 - \lambda y_0))$$

е колинеарен със Симсъновата права  $s_P$ . Така от (4) и (5) намираме параметричните уравнения на  $s_P$  във вида:

$$(6) \quad s_P : \begin{cases} x = \lambda(\nu y_0 - \mu z_0)t, \\ y = \frac{2\mu x_0 + \lambda(1 - 2y_0)}{2x_0} + \mu(\lambda z_0 - \nu x_0)t, \\ z = \frac{2\nu x_0 + \lambda(1 - 2z_0)}{2x_0} + \nu(\mu x_0 - \lambda y_0)t. \end{cases}$$

Ако Симсъновата права  $s_{P'}$  пресича правите  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  съответно в точките  $P'_a$ ,  $P'_b$  и  $P'_c$ , то аналогично на (4) имаме

$$(7) \quad \begin{aligned} P'_a & \left( 0, \frac{2(1 - \mu)x_0 - \lambda(1 - 2y_0)}{2x_0}, \frac{2(1 - \nu)x_0 - \lambda(1 - 2z_0)}{2x_0} \right), \\ P'_b & \left( \frac{2(1 - \lambda)y_0 - \mu(1 - 2x_0)}{2y_0}, 0, \frac{2(1 - \nu)y_0 - \mu(1 - 2z_0)}{2y_0} \right), \\ P'_c & \left( \frac{2(1 - \lambda)z_0 - \nu(1 - 2x_0)}{2z_0}, \frac{2(1 - \mu)z_0 - \nu(1 - 2y_0)}{2z_0}, 0 \right). \end{aligned}$$

От (7) аналогично на (6) получаваме уравненията на Симсъновата права  $s_{P'}$  във вида:

$$(8) \quad s'_{P'} : \begin{cases} x = (\lambda - 2x_0)(\nu y_0 - \mu z_0)t', \\ y = \frac{2(1 - \mu)x_0 - \lambda(1 - 2y_0)}{2x_0} + (\mu - 2y_0)(\lambda z_0 - \nu x_0)t', \\ z = \frac{2(1 - \nu)x_0 - \lambda(1 - 2z_0)}{2x_0} + (\nu - 2z_0)(\mu x_0 - \lambda y_0)t'. \end{cases}$$

От (6), (8) и (3) за координатите на пресечната точка  $T$  на  $s_P$  и  $s_{P'}$  получаваме:

$$(9) \quad \begin{aligned} x_T &= \frac{(1-2x_0)(\mu z_0 + \nu y_0 - \mu\nu)}{2y_0 z_0}, \\ y_T &= \frac{(1-2y_0)(\nu x_0 + \lambda z_0 - \nu\lambda)}{2z_0 x_0}, \\ z_T &= \frac{(1-2z_0)(\lambda y_0 + \mu x_0 - \lambda\mu)}{2x_0 y_0}. \end{aligned}$$

След заместване на (9) в лявата страна на (2) и използване на (3) се вижда, че (2) се превръща в твърдение. С това свойство 1 е доказано.

Преминваме към доказване на свойства 2 и 3. Нека  $h(P) = \bar{P}$  и  $h(P') = \bar{P}'$ . От свойствата на хомотетията следва, че  $\bar{P}$  и  $\bar{P}'$  са разположени диаметрално противоположно върху  $\Omega$ , а координатите им се изразяват с формулите:

$$(10) \quad \bar{P} \left( \frac{1-\lambda}{2}, \frac{1-\mu}{2}, \frac{1-\nu}{2} \right), \quad \bar{P}' \left( \frac{1-2x_0+\lambda}{2}, \frac{1-2y_0+\mu}{2}, \frac{1-2z_0+\nu}{2} \right).$$

От (10) с помощта на (3) лесно се установява, че координатите на  $\bar{P}$  и  $\bar{P}'$  удовлетворяват съответно (8) и (6), което означава, че  $\bar{P} \in s_{P'}$  и  $\bar{P}' \in s_P$ . С това свойства 2 и 3 са доказани.

Нека сега правите  $p$  и  $p'$  минават съответно през  $P$  и  $P'$ , така че  $p \parallel s'_P$  и  $p' \parallel s_P$ . Тъй като  $\bar{P} \in s'_P$  и  $p \parallel s_{P'}$ , то  $h^{-1}(s_{P'}) = p$ . Аналогично  $h^{-1}(s_P) = p'$ . Следователно  $h^{-1}(s_P \cap s'_P = T) = p' \cap p = U \in \bar{k}(O)$ . С това свойство 4 е доказано.

От току-що доказаната хомотетичност на точките  $U$  и  $T$  следва, че  $U(x_U = 1 - 2x_T, y_U = 1 - 2y_T, z_U = 1 - 2z_T)$ . Като приложим (5) получаваме, че векторът  $\vec{u}_0(x_U(z_U y_0 - y_U z_0), y_U(x_U z_0 - z_U x_0), z_U(y_U x_0 - x_U y_0))$  е колинеарен със Симсъновата права  $s_U$ . Сега от (9) и (3), след известни пресмятания, получаваме

$$\vec{u}_0 = \frac{[\lambda(z_0 - y_0) + (\mu - \nu)x_0][\mu(x_0 - z_0) + (\nu - \lambda)y_0][\nu(y_0 - x_0) + (\lambda - \mu)z_0]}{2x_0 y_0 z_0} \cdot \vec{OP}.$$

Последното равенство доказва свойство 5.

По-нататък от свойство 3 следва, че Симсъновата права  $s_{U'}$  на диаметрално противоположната точка  $U'$  на  $U$  върху  $\bar{k}(O)$  минава през  $h(U) = T$ , което доказва свойство 6.

За да докажем свойство 7, означаваме с  $L$  средата на отсечката  $T\bar{P}$ . От [7] е известно, че центърът  $W$  на  $\Omega$  в координати се представя по следния начин:  $W \left( \frac{1-x_0}{2}, \frac{1-y_0}{2}, \frac{1-z_0}{2} \right)$ . Сега, като вземем предвид (9) и (10), получаваме  $\vec{WL} = \frac{1}{2} \vec{P'T}$ . Следователно всеки диаметър на  $\Omega$ , успореден на  $s_P$ , минава през средите на хордите, успоредни на хордата  $T\bar{P}$ . Това означава, че правата  $s_P$  принадлежи на спрегнатото направление на  $s_{P'}$  спрямо  $\Omega$ . Поради хомотетичността на  $\bar{k}(O)$  и  $\Omega$ , правите  $s_P$  и  $s_{P'}$  принадлежат на спрегнати направления и спрямо  $\bar{k}(O)$ .

Доказаните свойства имат някои интересни последиствия. Първо, ако  $Q$  и  $Q'$  са други диаметрално противоположни за  $\bar{k}(O)$  точки, чиито Симсънови прави  $s_Q$  и  $s_{Q'}$  също минават през точката  $T$ , то правите  $q$  и  $q'$ , съответно през  $Q$  и  $Q'$ , такива че  $q \parallel s_{Q'}$  и  $q' \parallel s_Q$ , се пресичат в точката  $U$ . Тогава, според свойство 5, Симсъновата

права  $s_U$  ще се окаже успоредна на диаметрите  $PP'$  и  $QQ'$ , което е невъзможно. Второ, ако  $S$  е точка от  $\bar{k}(O)$ , чиято Симсънова права минава през  $T$ , но се пресича със Симсъновата права на диаметрално противоположната си точка  $S'$  върху  $\bar{k}(O)$  в точка  $K$  от  $\Omega$ , то  $T$  е хомотетична на  $S'$ . В същото време единствената точка, хомотетична на  $T$  при  $h^{-1}$ , е  $U$ . Следователно  $S' \equiv U$ . От последните разсъждения получаваме следното:

**Свойство 8.** *През всяка точка на  $\Omega$  минават най-много по три Симсънови прави.*

За да уточним резултата от свойство 8, нека разгледаме случая, когато Симсъновата права  $s_P$  е допирателна за  $\Omega$ . Тогава  $\bar{P}' \equiv T$  и  $s_{P'} \equiv \bar{P}P'$ . Затова  $s_{P'}$  е диаметър на  $\Omega$ , който е успореден на  $PP'$ . Оттук следва още, че  $p$  е допирателна на  $\bar{k}(O)$  в  $P'$  и  $p' \equiv PP'$ , което означава, че  $U \equiv P'$ . Затова през точката  $T$  минават само Симсъновите прави  $s_P$  и  $s_{P'}$ . Така получихме следните две свойства:

**Свойство 9.** *Ако  $P$  е точка от  $\bar{k}(O)$ , за която Симсъновата права  $s_P$  е допирателна на  $\Omega$  в точката  $T$ , то през  $T$  минават точно две Симсънови прави.*

**Свойство 10.** *Симсъновата права  $s_P$  на точката  $P$  от  $\bar{k}(O)$  е допирателна за  $\Omega$  тогава и само тогава, когато диаметрално противоположната точка  $P'$  на  $P$  върху  $\bar{k}(O)$  има Симсънова права  $s_{P'}$ , успоредна на  $PP'$ .*

Сега да разгледаме произволен диаметър  $d$  на  $\bar{k}(O)$ . На  $d$  можем да съпоставим единствената пресечна точка  $D \in \Omega$  на двете Симсънови прави, определени от  $d$ . Обратно, ако  $D$  е произволна точка от  $\Omega$ , а  $V$  е нейната хомотетична при  $h^{-1}$  върху  $\bar{k}(O)$ , то диаметрално противоположната точка на  $V$  има Симсънова права, минаваща през  $D$ . През центъра  $O$  на  $\bar{k}(O)$  има единствен диаметър  $d$ , който е успореден на тази Симсънова права. Пресечните точки на този диаметър  $d$  с  $\bar{k}(O)$  имат Симсънови прави, минаващи през  $D$ . Така получаваме следното:

**Свойство 11.** *Между диаметрите на  $\bar{k}(O)$  и точките на  $\Omega$  съществува взаимно еднозначно съответствие.*

Доказаните свойства показват, че Симсъновата права на произволна точка от описаната крива  $\bar{k}(O)$  винаги има обща точка с Ойлеровата крива  $\Omega$ . По-специално, свойство 10 дава необходимо и достатъчно условие, при което една Симсънова права е допирателна за  $\Omega$ . Интересно е обаче да се определи броят на точките от  $\bar{k}(O)$ , Симсъновите прави на които са допирателни за  $\Omega$ . За да намерим аналитично условие, с което се определят тези точки, да приведем едно параметрично представяне на точките от описаната крива  $\bar{k}(O)$ . Нека  $N(0, n, 1 - n)$  е произволна точка от правата  $BC$ . Ако правата  $AN$  пресича  $\bar{k}(O)$  в точка  $P(\lambda, \mu, \nu)$ , то са изпълнени равенствата:

$$(11) \quad \begin{aligned} \lambda &= \frac{(1 - 2x_0)x_0n(n - 1)}{(1 - 2x_0)x_0n^2 - (1 - 2x_0)(1 - 2y_0)n + (1 - 2y_0)y_0}, \\ \mu &= \frac{n[(1 - 2x_0)(y_0 - z_0)n + (1 - 2y_0)y_0]}{(1 - 2x_0)x_0n^2 - (1 - 2x_0)(1 - 2y_0)n + (1 - 2y_0)y_0}, \\ \nu &= \frac{(1 - n)[(1 - 2x_0)(y_0 - z_0)n + (1 - 2y_0)y_0]}{(1 - 2x_0)x_0n^2 - (1 - 2x_0)(1 - 2y_0)n + (1 - 2y_0)y_0}. \end{aligned}$$

**Забележка 1.** Ако правата  $AN$  е успоредна на  $BC$ , координатите на съответната точка от  $\bar{k}(O)$  се получават като от числителя и знаменателя в (11) се изнесе  $n^2$ , а

след това  $\frac{1}{n}$  се замести с нула.

Нека сега Симсъновата права  $s_{P'}$  на диаметрално противоположната точка  $P'$  на  $P$  е допирателна за  $\Omega$ . Тогава  $\bar{P} \equiv T$ , т.е.  $x_T = x_{\bar{P}}$ . Затова от (9) и (10) следва, че е изпълнено равенството  $\frac{(1-2x_0)(\mu z_0 + \nu y_0 - \mu\nu)}{2y_0 z_0} = \frac{1-\lambda}{2}$ . От последното и от (11), след известни преобразования, получаваме уравнението за  $n$

$$(12) \quad \begin{aligned} & (1-2x_0)^2(z_0-y_0)(1-x_0)n^3 + 3(1-2x_0)(y_0-z_0-2x_0y_0+z_0x_0)y_0n^2 + \\ & + 3(1-2x_0)(1-2y_0)y_0^2n + (1-2y_0)(x_0-y_0)y_0^2 = 0. \end{aligned}$$

Уравнението (12) показва, че съществуват най-много три точки върху  $\bar{k}(O)$ , Симсъновите прави на които са допирателни за  $\Omega$ . Твърдим, че броят на решенията на (12) зависи от вида на  $\bar{k}(O)$ . Затова да обърнем внимание на факта, че видът на  $\bar{k}(O)$  зависи от знака на израза

$$(13) \quad \Delta = (1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_0).$$

По-точно, ако  $\Delta < 0$ , кривата е елипса, а ако  $\Delta > 0$  – тя е хипербола.

От (12) е ясно, че  $n = 0$  тогава и само тогава, когато  $x_0 = y_0$  (това означава, че точката  $O$  лежи върху медианата  $CM_c$ ). Ако  $x_0 = y_0$ , (12) преминава в уравнението

$$(14) \quad n[(1-3x_0)(1-x_0)n^2 - 3(1-2x_0)x_0n + 3n^2] = 0.$$

Дискриминантата на квадратния израз в (14) е равна на  $3x_0^2(4x_0-1)$ . От друга страна, при  $x_0 = y_0$  в (13) се получава  $\Delta = (1-2x_0)^2(4x_0-1)$ . Следователно, (14) има три реални корена, когато описаната крива  $\bar{k}(O)$  е елипса, а когато тя е хипербола, уравнението има само един реален корен, който е  $n = 0$ .

Нека сега  $n \neq 0$ . Записваме уравнението (12) във вида:

$$(15) \quad \begin{aligned} & (1-2y_0)(x_0-y_0)y_0^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + 3(1-2x_0)(1-2y_0)y_0^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \\ & + 3(1-2x_0)(y_0-z_0-2x_0y_0+z_0x_0)y_0 \cdot \left(\frac{1}{n}\right) + (1-2x_0)^2(z_0-y_0)(1-x_0) = 0. \end{aligned}$$

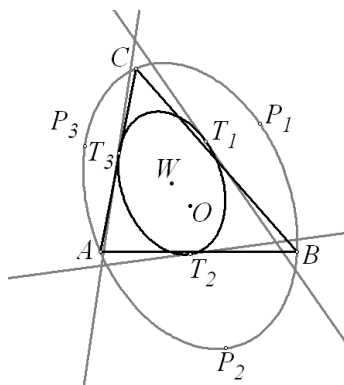
Тук, предвид забележка 1, случаят, при който  $\frac{1}{n} = 0$ , е еквивалентен със случая  $n = 0$ .

**Забележка 2.** Случаите  $n = 0$  и  $\frac{1}{n} = 0$  могат да не се разглеждат, ако се вземе предвид, че те биха попаднали в общия случай при параметризиране на  $\bar{k}(O)$  чрез снопа прави с център  $B$  или чрез снопа прави с център  $C$ . По същите причини специалният случай, описан в забележка 1, може да не се разглежда.

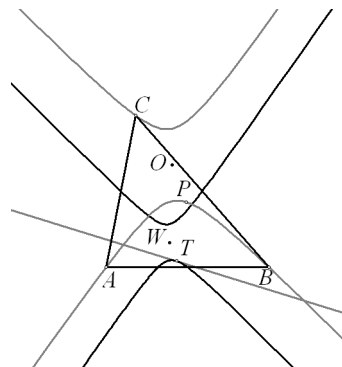
Сега в уравнение (15) извършваме смяната  $\frac{1}{n} = m - \frac{1-2x_0}{x_0-y_0}$ . Така получаваме уравнението  $m^3 + r.m + s = 0$ , където  $r = -\frac{3(1-2x_0)z_0^2x_0}{(x_0-y_0)^2(1-2y_0)y_0}$  и  $s = \frac{(1-z_0)(1-2x_0)z_0^2x_0}{(x_0-y_0)^3(1-2y_0)y_0^2}$ . Нека  $\bar{\Delta} = \left(\frac{r}{3}\right)^3 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = -\left[\frac{(1-2x_0)z_0^2x_0}{2(1-2y_0)^2(x_0-y_0)^2y_0^2}\right]^2 \cdot \Delta$ .

Добре известно е, че последното уравнение има един реален корен, когато  $\bar{\Delta} > 0$  и три – при  $\bar{\Delta} < 0$ . Тъй като знаците на  $\Delta$  и  $\bar{\Delta}$  са противоположни, то (15), а следователно и (12), има три реални корена, когато кривата  $\bar{k}(O)$  е елипса и един – когато тя е хипербола. По този начин стигаме до

**Свойство 12.** Ако  $\bar{k}(O)$  е елипса, съществуват точно три точки върху  $\bar{k}(O)$ , Симсзновите прави на които са допирателни за  $\Omega$ . Ако  $\bar{k}(O)$  е хипербола, съществува точно една точка върху  $\bar{k}(O)$ , Симсзновата права на която е допирателна за  $\Omega$  (фиг. 3 и 4).



Фиг. 3



Фиг. 4

Накрая да отбележим, че свойство 12 определя една или три специални точки върху всяка описана за даден триъгълник крива. Построяването на тези точки във всеки отделен случай може да се извърши, като се намерят реалните решения на съответното уравнение (12). За улеснение, самото решаване на уравнение (12) може да се извърши с друг софтуерен продукт, например Maple. Използването на Maple при други изчисления, свързани с геометрични обекти, е демонстрирано в [1].

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. ZLATANOV. Some Properties of Reflection of Quadrangle about Point. *Annals. Computer Science Series*, **11**, 1 (2013), 79–91.
- [2] S. KARAIВRYAMOV, В. TSAREVA, В. ZLATANOV. Optimization of the Courses in Geometry by the Usage of Dynamic Geometry Software Sam. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, **7**, 1 (2013), 22–51.
- [3] Б. ЦАРЕВА, Р. ГОДОРОВА. Интерактивно изучаване на описани четириъгълници в динамична среда. *Математика и информатика*, **2** (2013), 142–158.
- [4] С. ГРОЗДЕВ, Д. ДЕКОВ. Някои приложения на компютърната програма „Откривател“. *Математика и информатика*, **56**, 5 (2013), 444–455.
- [5] Х. ХИТОВ. Геометрия на триъгълника. София, Народна просвета, 1990.
- [6] В. НЕНКОВ. Две описани конични сечения и две породени от тях множества от прави. *Математика и математическо образование*, **36** (2007), 392–396.

- [7] V. NENKOV. Euler's Line and Euler's Curve Dependent by a Point. In: New Trends in Mathematics and Informatics, Jubilee International Conference 60 years Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy Sciences, Abstracts, Sofia, Bulgaria 6–8 July, 2007.
- [8] Г. ПАСКАЛЕВ, И. ЧОБАНОВ. Забележителни точки в триъгълника. София, Народна просвета, 1985.

Сава Иванов Гроздев  
Институт по математика и информатика  
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8  
1113 София  
e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Веселин Ненков Ненков  
Технически колеж Ловеч  
ул. "Съйко Съев" № 31  
5500 Ловеч  
e-mail: vnenkov@mail.bg

## SEVERAL PROPERTIES OF SIMSON LINES CONNECTED WITH EULER CURVES

**Sava Grozdev, Veselin Nenkov**

The paper considers several properties of analogues of Simson line and Euler circle, connected with circumscribed conics of a given triangle.