МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2014
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2014
Proceedings of the Forty Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 2–6, 2014

РИТМИ В ЧАСОВЕТЕ ПО ИНФОРМАТИКА

Емил Келеведжиев, Зорница Дженкова

Предложен е учебен материал за средното училище, в който елементи от информатиката, свързани с изучаване на низове, алгоритъм на Евклид, рекурсия и др., се прилагат и онагледяват с понятието за ритъм в музиката.

Увод. Връзката на математиката и музиката се проследява от времето на Питагор до днес. В съвременен аспект информационните технологии до голяма степен са съставна част на музикалното изкуство. В теорията основно са се разглеждали въпроси, свързани с музикалните тоналности ([1, 2]), но напоследък се появяват теоретични изследвания за ритмите, които са неотделима компонента на музиката.

Низове от 0 и 1. Започвайки изучаване на информатика и програмиране, учениците се запознават с понятието низ от знаци. Прост случай имаме, когато използваните знаци са само два – '0' и '1'. Но даже и в този случай могат да се поставят много съдържателни въпроси. Такъв въпрос е за „възможно най-равномерно разпределение на нулите и единиците“. Лесно се намират примери, когато е необходимо такова разпределение, например при проектиране на високоволтови електрически съоръжения [3] и др., но се оказва, че и ритмите, които откриваме в много музикални произведения (вкл. и в неравноделните български ръченици и хора), следват този принцип за „възможно най-равномерно разпределение“. Според някои автори [4] това е свързано с процеси в човешкия мозък за разпределяне на нервните импулси.

Интуицията ни подсказва, че низ от вида '1111100000000' не е с равномерно разпределени единици и нули, а низът '1001010010100', съдържащ същия брой единици (5) и нули (8) е „равномерен“. В общия случай разглеждаме низ с k единици и m нули. Когато $k = m$ или k е кратно на m, проблемът за определяне (и за намиране) на равномерен низ, е тривиален. Интересен е случаят, когато k и m са взаимно прости числа. Подходът, описан в [4], построява такива низове. Ще го изложим за примера, когато $k = 13$ и $m = 17$.

В началото образуваме едноелементни низове: 13 низа, състоящи се от '1' и 17 низа, състоящи се от '0':

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

Вземаме 13 от низовете от втория вид и всеки го долепяме до низ от първия вид:

```
10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 0 0 0 0
```

Така получаваме отново низове от два вида ('10' и '0') с брой съответно 13 и 4. Продължаваме със следващите стъпки на алгоритъма: имайки във всеки момент два вида низове, всеки низ от втория вид го долепяме до низ от първия вид (ако броят на низовете от втория вид е по-малък или равен на броя на низовете от първия вид, долепяме всичките; в противен случай долепяме толкова низа от втория вид, колкото са низовете от първия вид).

Така получаваме следваща стъпка:

`100 100 100 100 10 10 10 10 10 10 10 10 10`

Сега низовете от първия и втория вид са съответно от вида '100' и '10' и броят им е 4 и 9. Продължаваме:

`10010 10010 10010 10010 10 10 10 10 10`

Съответният брой на низовете от двата вида е 4 и 5.

`1001010 1001010 1001010 1001010 10`

Съответният брой на низовете от двата вида е 4 и 1.

`100101010 1001010 1001010 1001010`

Съответният брой на низовете от двата вида е 1 и 3.

`1001010101001010 1001010 1001010`

Съответният брой на низовете от двата вида е 1 и 2.

`10010101010010101001010 1001010`

Съответният брой на низовете от двата вида е 1 и 1.

`100101010100101010010101001010`

Тук процесът спира, защото е останал само един низ. Полученият низ съдържа „равномерно“ 13 единици и 17 нули. Следва функция от програма, написана на езика C++, която реализира в общия случай описания за примера по-горе алгоритъм.

```
void rhythm(int k, int m, string s[])
{
  int n=k+m;
  for(int i=1;i<=k;i++) s[i]="1";
  for(int i=k+1;i<=n;i++) s[i]="0";
  int d=min(k,m);
  while(d>0)
  {
    int c=k+m;
    for(int i=1;i<=d;i++)
     {s[i]=s[i]+s[c]; s[c]=""; c--;}
    if(k>m) k=k-m; else m=m-k;
    d=min(k,m);
  }
}
```

След изпълнението на функцията, резултатът се намира в `s[1]`.

Алгоритъм на Евклид и евклидови ритми. Ако разгледаме последователността от двойките числа, задаващи броя на низовете от двата вида при стъпките на алгоритъма за предишния пример:

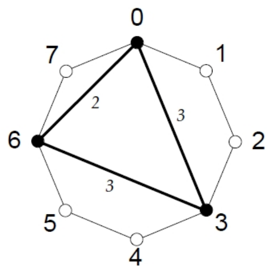
(13,17) (13,4) (4,9) (4,5) (4,1) (1,3) (1,2) (1,1),

забелязваме, че всяка следваща двойка в последователността се образува като по-голямото от числата в предишната двойка се заменя с разликата на по-голямото и по-малкото числа. Точно по същия начин работи известният алгоритъм на Евклид за намиране на най-малък общ делител на две положителни цели числа `k` и `m`:

```
while(k!=m)
 if(k>m) k=k-m; else m=m-k;
```

Ритмите в музиката често се представят като низове от '1' и '0', т. е. като двоични последователности, в които всеки бит се разглежда като единична мярка за време и '1' представя засилено звучаща нота (акцент), а '0' - слабо звучаща нота или даже пълна тишина. Ритмите, генерирани чрез описания по-горе алгоритъм, могат да се разглеждат като фамилия от ритми, характерни с „възможно най-равномерно“ разпределение на силните и слабите времена.

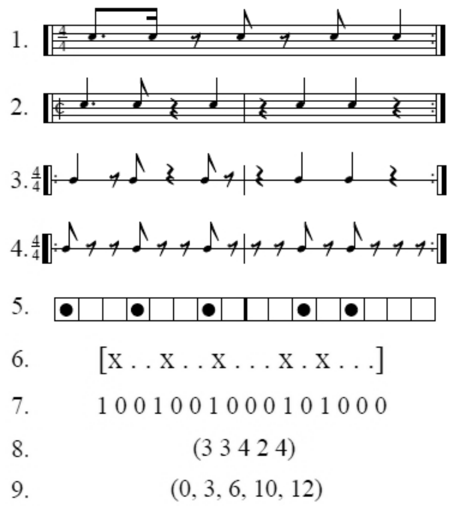
Поради описаната връзка с алгоритъма на Евклид, тези ритми е прието да се наричат евклидови ритми и се означават с $E(k,n)$, където $n = k + m$, а k и m задават броя на единиците и нулите в низа. Например $E(3,8) =$ "10010100". Използва се също и означение, при което '1' се заменя с 'x', а '0' – с '.'. Така $E(3,8)$ се записва като [x..x.x..]. Понеже в музикалните произведения последователността от ударени и неударени времена се повтаря циклично, уместна е илюстрацията с използване на кръгова диаграма. В много случаи се изобразява циклична пермутация на евклидовия ритъм (виж. фиг. 1, където е изобразен ритъмът [x..x..x.])



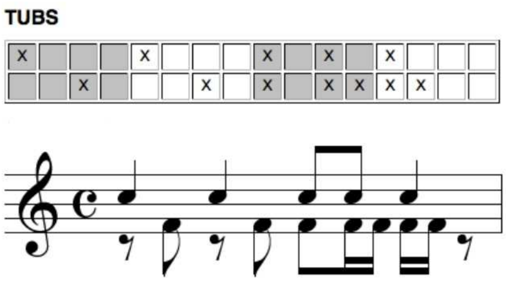
Фиг. 1. Геометрично представяне на $E(3,8)$

Музикалният ритъм [x..x..x.], получен от $E(3,8)$ е популярен в латиноамериканската музика и е известен с името „тресилио“ или „хабанера“.

На фиг. 2 са дадени няколко начина за представяне на ритмите в музиката. Означаването на силните и слабите времена се нарича бокс нотация (Time Unit Box System – TUBS) и за някои музикални инструменти се използва вместо общоприетата музикална нотация. На фиг. 3 е дадена нотация за клавес. Клавесът е латиноамерикански музикален перкусионен, т.е. ударен инструмент. Състои се от две летвички, дълги около 20-30 см. Традиционно се изработва от дървен материал и летвичките са направени така, че при звукоизвличането се получава добър резонанс.



Фиг. 2. Девет начина за представяне на ритми в музиката ([5])



Фиг. 3. Бокс нотация и традиционно записване

Поради цикличния характер на ритмите в музикалните произведения, евклидовите ритми се срещат и във вид, съответстващ на техни циклични пермутации. Например в българската музика има ритъм [x.x.x..], което е циклична пермутация на евклидовия ритъм $E(3,7) =$ [x..x.x.]. Така се получават разновидности на даден евклидов ритъм. Когато трябва да уточним, използваме означението с горен индекс, показващ броя позиции на изместването надясно ($E^4(3,7) =$ [x.x.x..]).

Редуцирана равномерност. Разглеждайки евклидовия ритъм $E(13,30)$, получен по-горе в примера:

`100101010100101010010101001010`,

забелязваме, че нулите са разпределени между единиците в два вида групи – по една или по две. Лесно се съобразява, че и в общия случай за равномерните ритми, когато $k < m$ нулите се появяват между единиците в *два вида групи*, в които броя на нулите се различава най-много с едно. Тези два вида групи от нули също са равномерно разпределени, т. е. образуват евклидов ритъм (с точност до циклична пермутация). За примера може да се убедим в това, като изтрием единиците и направим трансформация, с която да заменим всяка група от двойки нули с една единица. Получаваме `1000100100100`.

Този низ представя евклидовия ритъм $E(4, 13)$ и показва как равномерно се разпределят 4 единици и 9 нули. Прилагайки подобно преобразование още веднъж (сега заменяме с единица всяка група, съдържаща 3 нули, и заменяме с 0 всяка група, съдържаща 2 нули – изобщо всяка от групите от вида, който се среща по-рядко, заменяме с единица, а всяка от другите групи – с нула), получаваме `1000`. Това е $E(1, 5)$, което съдържа само една група от нули. Лесно може да направим наблюдение, че колкото „по-случайно равномерно е разпределението“, толкова повече са стъпките за редуциране, докато се получи само една група от нули. Например, компютърен експеримент показва, че при $(5, 12)$ броят на тези стъпки е 2, при $E(70, 169)$ е 5, а при $E(985, 2378)$ е 8.

Стъпките за редуциране например от $E(985, 2378)$ с точност до циклична пермутация пораждат редицата:

$$E(985, 2378) \to E(408, 985) \to E(169, 408) \to E(70, 169) \to$$
$$E(29, 70) \to E(12, 29) \to E(5, 12) \to E(2, 5) \to E(1, 2)$$

Ритми в българската музика. *Неравноделните размери*, наричани също *аксак* [6], са важен модел за ритмична структура в традиционната фолклорна музика на Балканите, Средния изток, Турция, Иран и Афганистан. В българската фолклорна музика се срещат в много произведения. Те се характеризират с нееднакви по продължителност ритмични групи в рамките на един такт, например [x.x..], което се записва и като „$2 + 3$“, и [x.x.x.x..], което се записва и във вида „$2 + 2 + 2 + 3$“. В световната музикология са наричани *български ритми* – термин, въведен от унгарския композитор и етномузиколог Бела Барток. Неравноделните размери са противоположност на по-масово използваните равноделни размери. Типичен пример за равноделен размер намираме в Дунавското хоро и в маршовата музика. Да отбележим, че отличителен белег на музиката с неравноделен размер е нейната непригодност да се използва за маршируване. Следват примери за произведения с неравноделен размер и връзката им с евклидовите ритми.

Пайдушко хоро от Добруджа има ритъм [x.x..], който е циклична пермутация на евклидовия ритъм $E(2, 5)$. Записва се в размер $5/8$ във вида „$2 + 3$“ и танцьорите броят стъпките в него като „раз-дваа“.

Евклидовият ритъм $E(3, 7) = 1001010 =$ [x..x.x.] често се среща в българската народна танцова музика, например в Шопската и Пиринската етнографски области (танците Гинка, Ширто, Четворно хоро), Деньово хоро от Северняшката област и др. Традиционно се записва в неравноделния тактов размер $7/8$ и се означава „$3+2+2$“. Танцьорите го броят като „**рааз**-два-три“.

Ритъмът $E^4(3, 7)) =$ [x.x.x..], който е циклична пермутация на евклидовия ритъм

$E(3,7)$ =[x..x.x.] намираме в Кюстендилска ръченица, Тракийска ръченица, танците Бера и Копче. Традиционно той се записва в тактов размер 7/8 във варианта „2+2+3“. Да отбележим, че този ритъм е използван и в песента „Money“ на Пинк Флойд.

Грънчарско хоро (Габровско) е с тактов размер 9/8 или 9/16, брои се като „раз-**дваа**-три-четири“ и е с ритъм $E^2(4,9)$ = [x.x..x.x.], който е циклична пермутация на евклидовия ритъм $E(4,9)$ =[x..x.x.x.]. Разновидност на този ритъм с удължен четвърти дял [x.x.x.x..] имат Дайчово хоро и народната песен „Бяла роза“.

Така виждаме, че освен при танцовата фолклорна музика, неравноделните размери са характерни и за песенното народно творчество. Друг пример е песента „Полегнала е Тодора“ в размер 11/8, (2+2+3+2+2), [x.x.x..x.x.], което е циклична пермутация на $E(5,11)$. Същият ритъм или негови разновидности се използват в индийската музика, в българските народни хора Копаница (южна България) или Ганкино (северна България), в македонското Калайджийско хоро и в произведението на Мусоргски „Картини от една изложба“.

Ритъмът [x.x.x.x.x.x..], който е разновидност на $E(6,13)$ се среща в македонската песен „Мама Цоне пита“ и в Петрунино хоро. Друга разновидност – [x.x.x.x..x.x.] е ритъм в македонското „Поступенно хоро“ и пловдивското „Криво хоро“.

През последните стотина години неравноделните размери навлизат в европейската симфонична музика (Бела Барток и Игор Стравински), и в джаза и рока.

Заключение. Учителят по информатика в извънкласните форми на работа може да насочи учениците към използване на подходящи софтуерни продукти за създаване и демонстриране на ритми в музиката. Ще посочим on-line и desktop версии на Ordrumbox за Windows (`http://www.ordrumbox.com`) и Rhythm Maker – наличен в Play Store за Android платформа. Възможен сценарий за обучение е да се използват такива софтуерни продукти за звукови илюстрации на евклидови ритми, получени чрез програмиране от учениците. Слушайки съответните последователности от силни и слаби времена, учениците могат да търсят и откриват реални музикални произведения, за които са характерни тези ритми. Възможен е и обратният подход, при който тръгвайки от реална музика, учениците намират ритмите в нея и ги изразяват като евклидови ритми. Много добра комбинация би се получила при съвместно учебно занятие с учител по музика и учител по информатика.

Предполагаме, че предложеният материал за учебно съдържание ще направи по-привлекателно преподаването на предмета информатика и ще е предпоставка за нови идеи в извънкласната работа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Келеведжиев, З. Дженкова. Математика, информатика и музика. *Математика и математическо образование*, **36** (2007), 92–101.

[2] Е. Келеведжиев, З. Дженкова. Алгоритмична музика в часовете по информатика *Математика и математическо образование*, **42** (2013), 399–405.

[3] E. Bjorklund. The theory of rep-rate pattern generation in the SNS timing system. SNS ASD Technical Note SNS-NOTE-CNTRL-99, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, U.S.A., 2003.

[4] G. Toussaint. The Euclidean Algorithm Generates Traditional Musical Rhythms. Proceedings of BRIDGES: Mathematical Connections in Art, Music and Science, Banff, Alberta, Canada, July 31–August 3, 2005, 47–56.
[5] G. Toussaint. Computational geometric aspects of rhythm, melody, and voice-leading. Computational Geometry, **43** (2010), 2–22.
[6] Encyclopaedia Britannica Online, Aksak
`http://www.britannica.com/EBchecked/topic/11771/aksak` (посетена на 8.10.2013)

Емил Келеведжиев
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: keleved@math.bas.bg

Зорница Дженкова
6 ОУ „Иван Вазов“
ул. Митко Палаузов № 54
5300 Габрово
e-mail: zornica.dzhenkova@gmail.com

RHYTHMS WHEN TEACHING INFORMATICS

Emil Kelevedjiev, Zornitsa Dzhenkova

Elements of secondary school material, related to strings, the Euclidean algorithm, recursion, etc., are offered for unified teaching in some aspects of computer programming and rhythms in music. The approach could serve in extra-curriculum activities as well as a proposal for a future improvement in the compulsory curriculum.