

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2014
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2014
Proceedings of the Forty Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 2–6, 2014

ОТНОСНО ПРЕНОСА НА ЗНАНИЯ И УМЕНИЯ

Борислав Лазаров, Таня Петрова

В статията са представени резултатите от обучаващ експеримент с изявени ученици по математика от 6. и 7. клас, проведен по време на Летния математически семинар „Черноризец Храбър“ 2013 г. Разгледани са въпроси относно преносът на знания и умения по темите многочлени и делимост при формулиране и доказване на признаци за делимост в бройни системи, различни от десетичната.

Ситуативният характер на знанията и уменията. Тук приемаме тезата на Лейв [4], че математическото образование се формира ситуативно, т. е. в рамките на определена екология. Ние ще стесним тази обща перспектива до конкретен образователен контекст, т. е. считаме, че претендиращото за абстрактност математическо знание и изгражданите като универсални математически умения, се формират в конкретен контекст. Преносът в друг контекст е по-скоро изключение, отколкото общ феномен. Нашата позиция за ключова компетенция кореспондира с декларираната от Европейската комисия в Съдържателната рамка [2]: за постигната в резултат на образователен процес компетенция следва да се говори, ако са налице двете основни характеристики: *преносимост* и *многофункционалност* на придобити знания, умения и нагласа. Такава компетенция включва: решаване на математическа задача; математическа комуникация и аргументация; математическо моделиране; представяне и използване на математически обекти и ситуации; използване на математически език. Всеки от изброените компоненти се разглежда на познавателно, комуникативно и аналитично ниво. В цитирания документ (ibid.) се предвижда изграждането на ключовите компетенции да стане в рамките на задължителното образование (compulsory education).

По този начин се поражда едно противоречие между стремежа да се формира компетенция и естествения ход на образователните процеси по математика, което следва да бъде анализирано, с цел разрешаването му. Това ни даде основание да проведем обучаващ експеримент за изясняване на наличието/отсъствието на пренос на знания и умения от един контекст в друг. Експериментът проведехме с изявени ученици от 6. и 7. клас, наблюдавайки преноса на знания и умения по две основни понятия (многочлени и признаци за делимост) в нов контекст (признаци за делимост в бройна система, различна от десетичната).

Параметри на експеримента. Експериментът бе проведен по време на Летния математически семинар *Черноризец Храбър*, 8–13 юли 2013 г. в Слънчев бряг. Популацията се състоеше от две групи изявени ученици от Варна, Велико Търново, 280

Габрово, Гоце Делчев, Пловдив, София, Шумен и Ямбол. Първата група включваше 15 ученици, завършили 6. клас, втората беше от 20 ученици, завършили 7. клас.

С двете групи беше проведено занятие от 90 минути по тема, подготвена от Б. Лазаров, а ходът на занятието се наблюдаваше от Т. Петрова. Приет беше сократов стил на изложение – материалът се поднасяше в интерактивен режим, на малки стъпки и при нужда с насочващи въпроси.

Наблюдавани бяха степента на пренос на знания и умения за многочлен в нормален вид, деление с остатък, бройна система и признаци за делимост, представени в нов, нетривиален контекст: признаци за делимост в бройна система, чиято основа е различна от 10. Сравнително малкият брой ученици в групите позволяваше да се проследява индивидуалното им участие и да се регистрира както устното им представяне, така и писмената им активност на дъската и в тетрадките.

Ход на занятията. Занятието във всяка от групите започна с актуализиране на знанията за бройна система, многочлен в нормален вид, деление с остатък, признаците за делимост на 4, 9, 7 и 11. Проверени бяха и уменията за превръщане на число от десетичен запис в двоична и троична бройна система.

Следващата стъпка в хода на занятието беше да се провери осмислянето на записа на естествено число в десетична бройна система – всички ученици знаеха смисъла на позиционната бройна система и правеха връзка между позицията на дадена цифра в десетичния запис и съответния коефициент в разлагането на числото по степени на 10. Направена беше връзката между алгоритъма за превръщане от десетична в двоична и троична бройна система, делението с остатък и разлагането на числото по степените на 2 и 3. Отбелязано беше сходството на такъв тип запис (полиномиален тип) с нормалния вид на многочлен на една променлива. Тази аналогия беше приета като естествена и не предизвика особени дискусии.

Всичко това даваше основание да се очаква, че повечето ученици ще могат да пренесат знанията и уменията, придобити и формирани в училище или на школи, в нов контекст. С други думи, очакванията ни бяха, че сериозните аналитични знания и съответните умения ще бъдат здрава основа за формирането на знания и умения от синтетичен тип. По-нататък в хода на занятията се обособиха два момента:

- формулиране на конкретен признак на основата на индуктивно организирани проби и грешки;
- обосновка на признака.

Втората част беше еднотипна – признак за делимост на числото p се обосноваваше чрез равенството $A + B = C$, в което B е кратно на p . Отбелязано беше, че при тези условия A и C едновременно се делят или не на p . По този начин се проверява делимостта на p за числото A , което е по-малко от изследваното число C , т. е. се явява съдържателната част на признака: $C \dot{:} p \iff A \dot{:} p$.

За илюстрация бяха обосновани признаците за делимост на 5 и 3 по начина, който е добре известен от училище. При това обосновката се правеше на дъската от ученик.

В първата група формулировките и обосновките се правеха за числа в общ вид, а във втората – за шестцифрени числа в общ вид. Промяната във втората група се наложи по две причини. Едната беше чисто техническа – дъската беше малка за изписването на дълги изрази и преобразования. Втората (по-съществена) беше,

че учениците не осмислят използването на многоточие, което предполага аналогия, подсказана от първите и последните членове в конкретния запис – например записът на многочлен от произволна степен в нормален вид силно затруднява учениците.

Наблюдения. В първа група (20 ученици от 6. клас) регистрирахме следните резултати.

- При актуализирането на знанията активно се включиха: за бройна система – 4 ученици; за нормален вид на многочлен – 2 ученици; за деление с остатък – 8 ученици; признаци за делимост на 4 и 9 – почти всички; признак за делимост на 7 – 6 ученици; признак за делимост на 11 – 3 ученици.
- Умения за преминаване от една бройна система в друга – 7 ученици.
- Инвариантност на делимостта относно бройната система се осмисля от 5 ученици.
- Формулиране на признак за делимост на 3 в троична бройна система направи 1 ученик.
- В дискусиата за формулиране на признаци за делимост в други бройни системи активно се включваха 4 ученици, като те показваха високи дедуктивни умения, правеха съдържателни обосновки, бързо се ориентираха в новите формулировки.

Във втора група (15 ученици от 7. клас) регистрирахме следните резултати.

- При актуализирането на знанията активно се включиха: за бройна система – 6 ученици; за нормален вид на многочлен – 3 ученици; за деление с остатък – всички ученици; признаци за делимост на 4 и 9 – всички; признак за делимост на 7 и 11 – 3 ученици.
- Умения за преминаване от една бройна система в друга – 13 ученици.
- Инвариантност на делимостта относно бройната система се осмисля от повечето ученици.
- Формулиране на признак за делимост на 4 и 8 в двоична бройна система направи 12 ученици (без да дадат обосновка).
- Формулиране на признак за делимост на 3 в троична бройна система направи 1 ученик, а друг – признака за делимост на 9, като признаците бяха обосновани за шестцифрени числа в общ вид.
- Формулиране на признак за четност (делимост на 2) на число в троичен запис – 3 ученици.
- В дискусиата за формулиране на признаци за делимост в други бройни системи активно се включваха повечето ученици, като те показваха високи дедуктивни умения, правеха доказателства за шестцифрени числа в общ вид.

Някои от учениците много сръчно преобразуват записа на число от десетичен към запис в друга бройна система. Обратното също се правеше от няколко ученици след като беше показано на дъската. Също така учениците и в двете групи знаят споменатите признаци, но не ги свързват с десетичния запис на числото. Учениците не успяха да осмислят връзката между стойност на полином в нормален вид и запис на число в конкретна позиционна система.

Когато учениците трябваше да обосновават признак за делимост на числото p , изхождайки от равенството $A + B = C$, в което B е кратно на p , те се справяха като цяло с едната посока (се дели на p , когато се дели на p), но винаги пропускаха втората част (не се дели на p , когато не се дели на p).

Оказа се, че провеждането на разсъжденията за шестцифрени числа в общ вид, вместо за произволни n -цифрени числа, много съществено влияе върху пълноценното осмисляне на формулировките и обосновките. От една страна, шестцифрените числа са достатъчно големи, за да се изрази идеята на съответния признак в пълната си сила; от друга страна, не се налагаше да се претрупват индексите и да се използва многоточие – рутинна практика в математиката, но недостъпна за съответната възрастова група. Например, признака за четност в троична бройна система изглежда в общия случай така

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} \div 2 \iff a_n + a_{n-1} + \dots + a_0 \div 2,$$

а за шестцифрени числа по следния начин

$$\overline{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} \div 2 \iff a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 \div 2.$$

Тази, на пръв поглед незначителна, промяна в стила даде големи резултати. Проверки и тестване на признака се правеха много по-лесно и разбираемо; в първия случай доказателството остана непосилно за една част от учениците, които не можаха да обосноват, че $3^n - 1$ е четно за всяко естествено n , а в случая с шестцифрените числа такъв проблем не се появи.

Заключения. Параметрите, в които проведохме експеримента, дават възможност да се направят едностранни изводи: ако в тази популация има пренос на знания и умения за някакъв процент на обучаемите, то в един среднестатистически клас не може да се очаква наличие на такъв пренос за по-висок процент; гаранции, че ако има пренос в тази популация, то, следвайки разработената методика, ще се постигне пренос в среднестатистическа паралелка, не могат да се дадат.

Изводите, до които стигнахме, са следните:

- в групата шестокласници преносът на знания и умения се реализира при 20% от учениците, което означава, че за наличие на компетенция практически не може да се говори;
- в групата на седмокласниците пренос на знания и умения от полиноми и делимост в нов (съвсем нетривиален) контекст се наблюдава (в различна степен) при голямата част от учениците – до 85%; това означава, че формирането на компетенция по основни понятия не е завършено даже при най-изявени ученици.

Имайки предвид изложеното, ние считаме, че в разработването на изпитни материали по математика за ученици след завършен 7. клас следва да се отчита подобна статистика. Например в *Учебно-изпитна програма по математика за приемане на ученици след завършен VII клас* явно се декларира: *Системата от задачи по математика в модула за национално външно оценяване се определя от задължителното учебно съдържание . . . , като се прилагат знанията и уменията, придобити в обучението до VII клас включително* [3]. За никаква компетенция не става дума.

Напротив, в постановката на изследването на ЦКОКУО за шестокласници се предполага наличие на основни математически знания, както и на умения те да бъдат прилагани не само за решаването на „чисти“ математически задачи, но и за по-широк кръг дейности, свързани с обяснение, комуникация, преценка и др., базирани на математически разсъждения [1]. В нашата терминология подобна теза съответства на пренос на знания и умения, т. е. на компетенция. По този начин

следните формулировки имат различна интерпретация.

Учениците, постигнали резултат на:

- 1-во равнище, демонстрират компетентности, силно ограничаващи възможностите за справяне с реални проблеми;
- 2-ро равнище, показват компетентности, които им позволяват да използват знанията и уменията си в реални ситуации;
- 3-то равнище, показват компетентности, които предполагат активно и самостоятелно участие в обществото. (ibid.)

Нашата позиция е, че за наличие на компетенция може да се говори само при учениците, постигнали 3-то равнище, а при 1-во и 2-ро равнище става въпрос за някакви знания и умения, неизлизащи от контекста на формирането им. Това не е само терминологичен въпрос. Подобна теза има сериозни методологически последиствия, които могат да повлияят съществено при взимането на управленски решения. Ще отбележим, че статистиката на цитираното изследване за трето равнище (много високи резултати) съответства на нашите наблюдения в проведения експеримент (ibid.).

Ние считаме, че не обучението, а ученето трябва да бъде водеща характеристика на образователната система, което означава, че развитието се превръща в естествен фокус на образователните ни усилия, а степента на преносимост на знания и умения на обучаемите в нов контекст е мерило за ефективност на нашия труд. Подобни съображения се споделиха и от учители, и от експерти по време на семинара „Модели за анализ на резултатите на учениците от външно оценяване“ на ЦКОКУО, Велинград 25–27.09.2013 г., в дискусиата за търсене на устойчиво образование в динамично равновесие със социалната среда.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] ЦКОКУО, Фондация „Заедно в час“. Изследване на четивната и математическата грамотност на учениците в VI клас. http://ckoko.bg/upload/docs/2013-01/Analiz_SKOКУO_20.09.pdf (активна през ноември 2013 г.)
- [2] European Commission. Framework for key competences in a knowledge-based society. <http://ec.europa.eu/education/policies/2010/doc/basicframe.pdf> (active in Nov 2013)
- [3] МОНМ. Учебно-изпитна програма по математика за приемане на ученици след завършен VII клас. http://www.minedu.government.bg/opencms/export/sites/mon/top_menu/general/examinational_programs/2012-2013/UIP_math_7k1-2012.pdf (активна през ноември 2013 г.)
- [4] J. LAVE. Cognition in practice: Mind, mathematics, and culture in everyday life. Cambridge, 1988.

Приложение. Бройни системи и признаци за делимост (дидактическа система задачи за изявени ученици при завършен 6. клас)

Задача 1. Изкажете и обосновайте признака за делимост на 9 и на 11.

Задача 2. Какъв признак можете да формулирате за делимост на 7? За кое друго просто число е в сила такъв признак?

Задача 3. Как се превръща десетичен запис на число в двоичен и троичен? Запишете числата 8, 9 и 10 в двоична и троична бройна система.

Задача 4. Запишете числото 100 в двоична и троична бройна система. Проверете кои от известните признаци за делимост могат да се приложат, например: вярно ли е, че числото се дели на 3 точно когато сборът от цифрите му се дели на 3?

Задача 5. Формулирайте и обосновайте признаци за делимост на 4 и 8 за числа в двоичен запис.

Задача 6. Запишете в троична система 2, 4, 6, 8; 3, 5, 7, 9. Кога едно число в троичен запис е четно? Обосновайте се!

Задача 7. Кога едно число в троичен запис е кратно на 5? Обосновайте се!

Задача 8. Кога едно число в троичен запис е кратно на 7? Сравнете този признак с признака в десетичен запис.

Задача 9. За кои числа p е верен такъв признак: едно число се дели на p , точно когато в бройна система с основа b завършва на 0?

Задачи за домашно:

Задача Д1. Запишете в петична бройна система числата 16, 24, 100.

Задача Д2. Кога едно число, записано в петична система, е четно?

Изследователски задачи:

Задача И1. Съставете компютърна програма (или използвайте електронни таблици) за да превръщате десетичен запис в бройна система с основа 2, 3 или 5.

Задача И2. Формулирайте и обосновайте признаци за делимост в петична бройна система. Например за делимост на 25, 13, 7, 9.

Борислав Лазаров
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. Акад. Георги Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: lazarov@math.bas.bg

Таня Петрова
ОУ „П.Р.Славейков“
бул. „Владислав Варненчик“, № 80
9000 Варна
e-mail: tanqpetrova@abv.bg

ON THE TRANSFER OF KNOWLEDGE AND SKILLS

Borislav Lazarov, Tanya Petrova

The paper presents the result of an experiment done with 6th and 7th grade students during the Summer school related to the Chernorizec Hrabar Tournament. Under consideration is the transfer of knowledge and skills from the topics Polynomials and Divisibility included in the secondary school curriculum to the divisibility criteria in different base systems.

Key words: gifted education, mathematics competence, knowledge and skills transfer