МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2014
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2014
Proceedings of the Forty Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 2–6, 2014

ПРИЛОЖЕНИЕ НА СИСТЕМИТЕ MAPLE И MATLAB В ОБУЧЕНИЕТО ПО ТЕМАТА „УРАВНЕНИЯ НА РАВНИНИ И ПРАВИ В ПРОСТРАНСТВОТО“

Златка Матева

Статията предлага практически опит в прилагането на системите за компютърна математика Maple и MATLAB при обучението по темата „Уравнения на равнини и прави в пространството“, която се изучава от всички инженерни специалности в ТУ-Варна. Анализирани са някои предимства и недостатъци на двете системи за компютърна математика от гледна точка на учебния ефект.

Увод. Повече от 20 години сме свидетели на една тревожна тенденция: в световен мащаб все повече ученици и студенти имат незадоволителни математически познания. Не е тайна, че дипломиращите се днес инженери имат по-слаба математическа култура от тези, завършили преди 20 и дори преди 10 години. Този факт е неизменно във фокуса на вниманието на всички специалисти, на ръководствата и на редовите преподаватели в инженерните университети.

В ТУ–Варна, за да се повиши интересът на студентите към математиката, донякъде да се преодолее проблемът с предварителната подготовка и да се постави обучението на съвременни основи, в курсовете по висша математика са предвидени часове (лабораторни упражнения), в които задачите се решават с помощта на системите за компютърна алгебра (CAS – Computer Algebra Systems) Maple, MATLAB и MatCad. В тези часове студентите задълбочават своите математически знания и същевременно се научават как да ползват математическия софтуер, за да решават задачи или да проверяват получени „на ръка“ резултати. Организацията на работата в лабораторните упражнения, подборът на задачите и формите на взаимодействие на студентите се съобразяват със специалността на групата и ползвания компютърен продукт. В тази статия се предлага кратка съпоставка на принципните възможности на двете най-често използвани системи – Maple и MATLAB, в упражнението по темата „Уравнения на равнини и прави в пространството“. Направени са методически бележки, породени от личния преподавателски опит на автора. Анализирани са някои предимства и недостатъци на Maple и MATLAB от гледна точка на възможния учебния ефект.

Накратко за Maple и MATLAB [2,3]. През 1968-ма година се появява първият програмен продукт (REDUCE), реализиращ идеята за използване на компютрите не само за числени, а и за аналитични пресмятания. В наши дни ежегодно, а понякога и два пъти в една година се появяват нови, усъвършенствани версии на най-популярните системи за компютърна математика като Mathematica, Maple, MATLAB, MatCad, Derive и други. Всички тези системи имат близък, „дружелюбен“ интерфейс и богати средства за решаване на математически задачи и изследователски проблеми. Това ги прави приятни, лесни и полезни помощници на учени, преподаватели и студенти. Въпреки значителните сходства между най-популярните системи за компютърна алгебра, в целия свят най-предпочитани за инженерни и математически изследвания са продуктите Maple и MATLAB (с вградената в пакета Symbolic Math Toolbox съвременна система за компютърна математика MuPAD, която може да се ползва в отделен диалогов прозорец). Maple се предпочита заради специално разработените средства за обучение на ученици и студенти, а MATLAB – заради разнообразните, специализирани инженерни приложения.

Подбор на задачите за лабораторно упражнение. В началото на часа трябва да се решат един или няколко встъпителни примера. Целта на тези примери е студентите да се запознаят с подходящите команди и с начина им на употреба. Броят на встъпителните задачи не трябва да е голям, но те трябва да бъдат подбрани така, че да дадат достатъчно добра основа за решаване на следващите задачи. Студентите не могат, а и не е необходимо да научават всички команди и техните формати, защото както повечето съвременни системи за компютърна алгебра, Maple и MATLAB са снабдени с подробен, обучаващ Help, но е полезно да знаят какви възможности има системата в съответната област.

На следващия етап се разглеждат задачи, чието решаване изисква по-творческо отношение, както и задачи с практическа насоченост. На най-добрите студенти може допълнително да се предложат задачи с повишена трудност, като се постави и изискване за кратко и елегантно решение.

Задачите, които се разглеждат в настоящата статия, имат за цел да покажат някои възможности на Maple и MATLAB за работа с равнини и прави в пространството, като дадат възможност на начинаещия читател да сравни двете системи и да избере предпочитаната от него.

Приликата между системите Maple и MuPAD в областта на линейната алгебра, реалния и комплексния анализ, аналитичното и численото решаване на диференциални уравнения и още много други дялове на математиката, е безспорна, но в обучението по аналитична геометрия Maple има безспорна преднина. Принципната разлика между двата възможни подхода за решаване на задачи за равнини и прави в пространството със системите Maple и MuPAD се състои в това, че в MuPAD решенията се базират на линейната алгебра и векторното смятане, а в Maple за целите на аналитичната геометрия има разработена малка специализирана библиотека `geom3g`. Най-общо:

В MuPAD, решаването на задача за равнини и прави в пространството се свежда до изразяване на скаларно и векторно произведение на два вектора, пресмятане на матрици и детерминанти, съставяне и решаване на системи линейни уравнения. Векторите в MuPad се разглеждат като частен случай на матрици и се задават с помощта на командата `matrix`. Скаларното произведение на два вектора се изчислява с командата `scalarProduct` на библиотеката `linalg`, а векторното – с командата `crossProduct` от същата библиотека.

В Maple може да се използва библиотеката `geom3d`, предназначена за работа с тримерна аналитична геометрия. Активирането на библиотеката, с командата `with(geom3d)`, създава комфортна среда за бързо и лесно опериране с тримерни геометрични обекти (точки, прави, равнини, сфери, триъгълници, някои видове многостени и др.). Дефинирането на точки, прави и равнини се извършва съответно с командите `point`, `line` и `plane`. Пълната информация за въведен обект може да се получи с командата `detail`, а частична информация – с команди като `coordinates` (за точки) и `Equation` (за уравненията на права, равнина, сфера и др.). Командите `line` и `plane` притежават по няколко формата, всеки от които съответства на конкретен начин за определяне на права или равнина. Част от форматите отговарят на класическите (изложени на лекциите) възможности за задаване на равнини и прави в пространството, но има и формати, които не съответстват на известни формули, а са свързани със случаи, които се разглеждат на семинарните упражнения като основни задачи. Така например, за уравнение на равнина, на лекцията се дефинират общото и отрезовото уравнение на равнина и се извеждат формулите за уравненията на равнина, определена от: точка и нормален вектор; от точка и два неколинеарни вектора, успоредни на равнината; от три неколинеарни точки, докато в разновидностите на командата `plane` има възможност за определяне на равнина, минаваща през две успоредни или пресичащи се прави, както и за равнина, минаваща през дадена права и успоредна на втора права, кръстосана с първата.

Ще илюстрираме казаното чрез решенията на следващата задача.

Задача. [1] Дадени са точка (7,5,1), права $g:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-9}{-3}=\dfrac{z+4}{2}$ и равнина $\alpha:\ x+y+2z-8=0$. С M_1 е означена точката, симетрична на M относно правата g, а с M_2 точката, симетрична на M относно равнината α. Да се намери лицето на триъгълника MM_1M_2, а също така уравнението и дължината на медианата през върха M на същия триъгълник.

Най-напред трябва да се определят координатите на точките M_1 и M_2. Задачите за намиране на ортогоналната проекция и симетричната точка на точка спрямо права или спрямо равнина са основни задачи, които се разглеждат на семинарните упражнения. Координатите на точките M_1 и M_2 се намират, като първо се състави уравнението на равнината α_1, която минава през точка M и е перпендикулярна на g, и уравненията на правата g_1, която минава през точка M и е перпендикулярна на α; след това се определят координатите на пресечните точки P_1 на g и α_1 и P_2 на g_1 и α, които са ортогоналните проекции на M съответно върху g и α, и накрая се намират координатите на точките M_1 и M_2, така че P_1 да е средата на отсечката MM_1, а P_2 да е средата на отсечката MM_2.

Решение с MuPAD. Първоначално се въвеждат точката M (като матрица ред), правата g (като списък от трите скаларно-параметрични уравнения на правата), равнината α (чрез нейното общо уравнение) и нормалният вектор на α (отново като матрица ред).

```
M := matrix(1, 3, [7, 5, 1]) :            // точката M
g := [2 * t + 1, -3 * t + 9, 2 * t - 4] : // правата g
l := matrix(1, 3, [2, -3, 2]) :           // напр. вектор на g
a := x + y + 2 * z - 8 = 0 :              // равнината α
n := matrix(1, 3, [1, 1, 2]) :            // норм. вектор на α
```

След това се съставят скаларно-параметричните уравнения на правата g_1 и общото уравнение на равнината α_1.

$$\left[\begin{array}{l}\texttt{g1} := [\texttt{n}[1]*\texttt{t}+\texttt{M}[1], \texttt{n}[2]*\texttt{t}+\texttt{M}[2], \texttt{n}[3]*\texttt{t}+\texttt{M}[3]];\\ \texttt{a1} := \texttt{l}[1]*(\texttt{x}-\texttt{M}[1])+\texttt{l}[2]*(\texttt{y}-\texttt{M}[2])+\texttt{l}[3]*(\texttt{z}-\texttt{M}[3])=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}[\mathtt{t}+7, \mathtt{t}+5, 2\mathtt{t}+1]\\ 2\mathtt{x}-3\mathtt{y}+2\mathtt{z}-1=0\end{array}\right.$$

Последователно се намират координатите на двойките точки (P_1, M_1) и (P_2, M_2).

```
t1: = solve({a1,x = g[1],y = g[2],y = g[3]},t)[1]:
P1 := matrix(1,3,subs(g,t = t1[1])) :
M1 := 2 * P1 - M;
```

$$\left[\ (3, 1, -1)\right.$$

```
t2: = solve({a,x = g1[1],y = g1[2],y = g1[3]},t)[1]:
P2 := matrix(1,3,subs(g,t = t2[1])) :
M2 := 2 * P2 - M;
```

$$\left[\ (5, 3, -3)\right.$$

Лицето на триъгълника MM_1M_2 се пресмята по формулата $S = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{MM_1} \times \overrightarrow{MM_2}\right|$, като командата norm($v$,2) дава дължината на вектора v.

```
S := norm(linalg :: crossProduct(M - M1, M - M2), 2)/2;
```

$$\left[\ 6\sqrt{2}\right.$$

Ако средата на отсечката M_1M_2 е т. N, то уравнението и дължината на медианата MN се намират както следва:

```
N := (M1 + M2)/2 :    MN := M - N :
p := [M[1] + MN[1] * t, M[2] + MN[2] * t, M[3] + MN[3] * t];
m := norm(MN, 2);
```

$$\left[\begin{array}{l}[3\mathtt{t}+7, 3\mathtt{t}+5, 3\mathtt{t}+1]\\ 3\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Решение с Maple. Горното решение, с много малки изменения, е изпълнимо и в Maple. Тук ще покажем решението с помощта на командите от библиотеката geom3d.

```
restart : with(geom3d) :                              # дефиниране на
point(M, [7, 5, 1]) :                                 # точка M
line(g, [2 * t + 1, -3 * t + 9, 2 * t - 4], t) :      # правата g
plane(α, x + y + 2 * z - 8 = 0, [x, y, z]) :          # равнината α
```

```
plane(α1, [M, ParallelVector(g)], [x, y, z]), Equation(β)    # α1
                α1, -1 + 2x = 3y + 2z = 0
```

```
intersection(P1, g, α1) coordinates(M);              # P1
m := 2 * coordinates(P1) - coordinates(M) :
point(M1, m), coordinates(M1);                        # M1
        P1[5, 3, 0]
        M1[3, 1, -1]
```

$$\left[\begin{array}{ll} \texttt{line}(\texttt{g1},[\texttt{M},\mathrm{NormalVector}(\alpha)],[\texttt{x},\texttt{y},\texttt{z}]),\texttt{Equation}(\alpha_1) & \#\, g_1 \\ \qquad\qquad g1,[7+t,5+t,1+2t] & \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \texttt{intersection}(\texttt{P2},\texttt{g1},\alpha)\ \texttt{coordinates}(\texttt{P2}); & \#\, \texttt{P}_2 \\ \texttt{m} := 2*\texttt{coordinates}(\texttt{P2})-\texttt{coordinates}(\texttt{M}): & \\ \texttt{point}(\texttt{M2},\texttt{m}),\texttt{coordinates}(\texttt{M2}); & \#\, \texttt{M}_2 \\ \qquad \texttt{P2}[6,4,-1] & \\ \qquad \texttt{M2}[5,3,-3] & \end{array}\right.$$

В Maple координатите на точките M_1 и M_2 може да се получават директно с командата `reflection` от библиотеката `geom3d`.

$$\left[\begin{array}{lll} \texttt{reflection}(\texttt{M1},\texttt{M},\texttt{g}) & \texttt{coordinates}(\texttt{M1}), & \#\, \texttt{M}_1 \\ \texttt{reflection}(\texttt{M2},\texttt{M},\alpha) & \texttt{coordinates}(\texttt{M2}); & \#\, \texttt{M}_2 \end{array}\right.$$

За да намерим лицето на $\Delta \mathrm{MM_1M_2}$ще дефинираме триъгълника като нов геометричен обект и ще получим неговото лице с командата *area*.

$$\left[\begin{array}{ll} \texttt{triangle}(\Delta\texttt{MM1M2},[\texttt{M},\texttt{M1},\texttt{M2}],[\texttt{x},\texttt{y},\texttt{z}]): & \#\, \Delta\texttt{MM}_1\texttt{M}_2 \\ \texttt{area}(\Delta\texttt{MM1M2}) & \#\, S_\Delta \\ \qquad 6\sqrt{2} & \end{array}\right.$$

Уравнението и дължината на медианата N се получават както следва:

$$\left[\begin{array}{l} \texttt{midpoint}(\texttt{N},\texttt{M1},\texttt{M2}): \\ \texttt{line}(\texttt{m},[\texttt{M},\texttt{N}],\texttt{t})\ \ \texttt{Equation}(\texttt{m}); \\ \texttt{distance}(,\texttt{N}); \\ \quad [4+3\texttt{t},2+3\texttt{t},-2+3\texttt{t}] \\ \qquad 3\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Сравняването на двете решения ясно откроява разликата между Maple и MATLAB в тримерната аналитична геометрия. Начините и средствата за решаване на учебните задачи за равнини и прави в пространството, характерни за MuPAD, са налични и в Maple, но библиотеката `geom3d` предлага възможност за решаване на идейно ниво, свободно от изчислителните детайли. Кой от двата подхода е поправилен? Личният опит на всеки преподавател ще му подскаже правилния отговор в зависимост от поставените учебни цели.

Заключение. На външен вид работата в диалоговия прозорец на MuPAD силно наподобява работата в системата Maple. Приликите в двата продукта са безспорни и запознатите с Maple лесно свикват да си служат с MuPAD. Все пак MuPAD отстъпва на Maple по отношение на специално разработените с учебна цел средства. Така е и по отношение на възможностите за работа с равнини и прави в пространството. В MuPAD има удобен набор от графични команди и опции в тях за работа с геометрични обекти, но няма специализирани команди за аналитични пресмятания, свързани с уравненията на прави и равнини. Както се вижда от решението на задачата, този „недостатък“ на MuPad, може да се приеме и като „предимство“ за по-детайлно осмисляне и прилагане на знанията от линейната алгебра, векторното смятане и аналитичната геометрия.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Димова-Нахчева и кол. Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика, част 1, ДИ „Техника“, 1975., стр. 281, зад. 544.
[2] Й.Тончев. MuPAD новият символен мотор на MATLAB. Техника, София, 2011.
[3] Й.Тончев. Maple преобразувания, изчисления, визуализация. Техника, София, 2013.

Златка Тенева Матева
Технически Университет – Варна
Ул. Студентска, № 1
9010 Варна
e-mail: ziz@abv.bg

APPLYING THE MAPLE AND MATLAB SYSTEMS IN TEACHING THE TOPIC "EQUATIONS FOR STRAIGHT LINES AND PLANES IN THE SPACE"

Zlatka Mateva

This article provides practical experience in the application of the Computer Algebra Systems Maple and MATLAB in the teaching process on the topic "Equations for lines and planes in the space", which is studied by all engineering programmes at Technical University of Varna. Emphasis is on the fundamental difference in the implemented approaches.