МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2014
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2014
Proceedings of the Forty Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 2–6, 2014

РЕШАВАНЕ НА НЯКОИ СПЕЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ*

Веселка Михова, Юлия Нинова

В статията се анализират условия, при които е логично да се изследват някои специални типове уравнения за евентуално съществуване на решения. Разгледани са три групи конкретни задачи.

1. Предварителни сведения. Преди да започнем да решаваме един математически проблем (задача) е добре да анализираме елементите, които участват при формулирането му и връзките между тях (при какви допълнителни условия са възможни и коректни).

Едва след това пристъпваме към избор на метод за решаване на поставената задача и търсене на множеството от решенията ѝ.

В статията анализираме три специални типа уравнения и даваме конкретни задачи, при чието изследване и решаване прилагаме предложените теоретични разсъждения.

1.1. Основно твърдение. *Ако сумата от краен брой неотрицателни събираеми е не по-голяма от* 1*, то всяко едно от събираемите е не по-голямо от* 1:

$$|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \le 1 \quad \Rightarrow \quad |x_k| \le 1, \quad \forall\, k = 1, \dots, n.$$

Обратното твърдение не винаги е вярно.

Действително, ако допуснем, че поне едно от събираемите е по-голямо от 1, то и сумата на това събираемо и останалите неотрицателни събираеми ще бъде по-голяма от 1, което противоречи на условието.

За да докажем, че обратното твърдение не е вярно, е достатъчно да дадем един контрапример: $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}, \quad \frac{5}{4} > 1\right)$.

1.2. Необходими условия за евентуално съществуване на решения на уравнения от вида (∗). Да разгледаме уравнението

$$|f(x)| + |g(x)| = h(x). \tag{$*$}$$

Естествен е въпросът: *При какви условия за функциите $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ е смислено да се изследва уравнение $(*)$ за евентуални решения?*

Даваме *необходими условия, при изпълнението на които уравнение $(*)$ трябва да се анализира за евентуално съществуване на решения.*

*Първият автор е частично подпомогнат от договор СУ, 99/2013. Вторият автор е частично подпомогнат от договор СУ, 159/2013.

(а) Трябва да съществува подинтервал на дефиниционното множество на функцията $h(x)$, в който тя приема неотрицателни стойности.

(б) Дефиниционните множества на неотрицателните функции $|f(x)|$, $|g(x)|$ и $h(x)$ трябва да имат непразно сечение $\mathcal{I}$.

(в) Трябва да съществува подинтервал $\mathcal{J}$ на $\mathcal{I}$, в който всяка от функциите $|f(x)|$ и $|g(x)|$ да приема стойности, не по-големи от съответните стойности на функцията $h(x)$:

$$\{|f(x)| \leq h(x)\} \ \wedge \ \{|g(x)| \leq h(x)\} \quad \forall \, x \in \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}.$$

(г) Множествата от стойностите на функциите $|f(x)| + |g(x)|$ и $h(x)$ в интервала $\mathcal{J}$ трябва да имат непразно сечение.

Ако са изпълнени тези необходими условия за дадените функции, то *решенията на уравнение* $(*)$*, ако такива съществуват, са от интервала* $\mathcal{J}$. Тези решения са абсцисите на пресечните точки на графиките на функциите $|f(x)| + |g(x)|$ и $h(x)$ в интервала $\mathcal{J}$.

Ако някое от тези необходими условия не е изпълнено, то *уравнение* $(*)$ *няма решение.*

1.3. Специален вид уравнения от тип $(*)$**.** Да разгледаме уравнението

$$(**) \qquad \sqrt{u} + \sqrt{v} = \sqrt{u + v + w}.$$

То е дефинирано при $u \geq 0$, $v \geq 0$, $u + v + w \geq 0$.

За да съществуват (евентуално) решения на уравнение $(**)$, е необходимо да са изпълнени едновременно и неравенствата

$$\sqrt{u} \leq \sqrt{u + v + w} \ \Leftrightarrow \ v + w \geq 0; \quad \sqrt{v} \leq \sqrt{u + v + w} \ \Leftrightarrow \ u + w \geq 0.$$

Понеже членовете от лявата и дясната страна на равенството $(**)$ са неотрицателни, то можем да сведем уравнение $(**)$ до еквивалентното му

$$2\sqrt{uv} = w.$$

За решенията на това уравнение са в сила следните възможности.

При $w < 0$ то няма решение.

При $w = 0$ решението е $\{u = 0\} \ \vee \ \{v = 0\}$.

При $w > 0$ решения са всички положителни числа u, v, удовлетворяващи уравнението $4uv = w^2$.

Този анализ улеснява решаването на конкретни уравнения от тип $(**)$.

ЗАДАЧИ

Да разгледаме групи от задачи, илюстриращи горните теоретични разсъждения.

2. Задачи, свързани с основното твърдение. При решаването на задачите от тази група прилагаме непосредствено основното твърдение.

Задача 2.1 (виж и [1], стр. 145, задача 11)**.** *Да се докаже, че уравнението*

$$(1) \qquad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1$$

няма цели положителни (цели отрицателни) решения.

Решение. Всяко решение на уравнение (1) е наредена двойка реални числа

$$(x, y) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Да допуснем, че съществуват положителни решения на (1), т. е. $x > 0$, $y > 0$. В този случай и трите събираеми в (1) са положителни числа. Сумата на три положителни числа може да е равна на единица, когато всяко от тях е по-малко от единица. Следователно за неизвестните x, y от уравнението (1) имаме $x > 1 \wedge y > 1$.

Да означим лявата страна на уравнение (1) с $f(x, y)$:

$$f(x, y) := \frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2}.$$

Търсим наредени двойки от цели числа (x, y), за които е изпълнено

$$x > 1,\ y > 1 \text{ и } f(x, y) = 1.$$

Нека $x \geq 2 \ \wedge \ y \geq 2$. Тогава $\dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{1}{4}, \quad \dfrac{1}{xy} \leq \dfrac{1}{4}, \quad \dfrac{1}{y^2} \leq \dfrac{1}{4}$ и $f(x, y) \leq \dfrac{3}{4} < 1$.

Следователно, за всяка наредена двойка (x, y) от цели числа, удовлетворяващи условието $x > 1 \wedge y > 1$, условието $f(x, y) = 1$ не е изпълнено, т. е. уравнение (1) няма решения от типа (x, y), $x \in \mathbb{Z}^+ \ \wedge \ y \in \mathbb{Z}^+$.

По аналогичен начин се доказва, че уравнение (1) няма и решения от типа

$$(x, y), \quad x \in \mathbb{Z}^- \ \wedge \ y \in \mathbb{Z}^-.$$

Забележка. Наредените двойки цели числа $(-1, 1)$, $(1, -1)$ обаче са решения на уравнение (1), т. е. то има решения от типа (x, y), $x \in \mathbb{Z} \ \wedge \ y \in \mathbb{Z}$. □

Задача 2.2. *Да се намерят тези наредени тройки числа (x, y, z), $x \in \mathbb{Z} \ \wedge \ y \in \mathbb{Z} \ \wedge \ z \in \mathbb{Z}$, които са решения на уравнението:*

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 1.$$

Задача 2.3. *Да се намерят тези наредени четворки числа (x, y, z, t), $x \in \mathbb{Z} \ \wedge \ y \in \mathbb{Z} \ \wedge \ z \in \mathbb{Z} \ \wedge \ t \in \mathbb{Z}$, които са решения на уравнението:*

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} = 1.$$

Задача 2.4. *Да се докаже, че уравнението*

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + ... + \frac{1}{x_n^2} = 1$$

има решения в множеството на целите числа, когато броят n на неизвестните е квадрат на някое естествено число.

Задача 2.5 (виж и [3], Задача 1)**.** *Да се реши уравнението*

$$\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{y+1}{y^2+1} = 2,$$

където x и y са положителни числа и $x + y = 1$.

Решение. Щом $x + y = 1$ и $x > 0$, $y > 0$, то $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $x^2 < x$, $y^2 < y$. Следователно при дадените условия

$$\frac{x+1}{x^2+1} > 1 \quad \wedge \quad \frac{y+1}{y^2+1} > 1,$$

а сумата им е по-голяма от 2, т. е. уравнението няма решение. □

3. Задачи от тип (∗). Основна роля в анализа на задачите от тази група играят необходимите условия за евентуално съществуване на решение.

Задача 3.1 ([2], Задача 2)**.** *Да се реши уравнението:*

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{2\,x+5} = 1. \tag{2}$$

Решение. Уравнение (2) е от тип (∗). Множеството, в което са дефинирани двата радикала (дефиниционното множество), е определено от системата линейни неравенства

$$\left|\begin{array}{l} x+2 \geq 0, \\ 2\,x+5 \geq 0. \end{array}\right. \tag{3}$$

Множеството от решенията на системата (3) е

$$x \in [-2, \infty). \tag{4}$$

Понеже в уравнение (2) и двете събираеми са неотрицателни и сумата им е равна на 1, то те са едновременно не по-големи от 1, т. е.

$$\left|\begin{array}{l} x+2 \leq 1, \\ 2\,x+5 \leq 1. \end{array}\right. \tag{5}$$

Множеството от решенията на системата (5) е

$$x \in (-\infty, -2]. \tag{6}$$

Решенията на уравнение (2) трябва да са елементи от сечението на множествата (4) и (6), което е множеството $\mathcal{J} = \{-2\}$, състоящо се от един елемент.

Непосредствена проверка показва, че единственото решение на уравнение (2) е

$$x_0 = -2. \qquad \square$$

Задача 3.2 (виж и [1], стр. 30, задача 16)**.** *Да се намери множеството от решения на уравнението:*

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x}. \tag{7}$$

Решение. Уравнение (7) е от тип (∗). То е дефинирано точно когато са дефинирани и трите му събираеми, т. е. при $x+1 \geq 0 \ \wedge \ x+2 \geq 0 \ \wedge \ x \geq 0$.

Дефиниционното множество на уравнение (7) е $[0, +\infty)$.

Лесно се проверява, че $x = 0$ не е решение. Търсим решения на уравнението в интервала $(0, +\infty)$.

В лявата страна на равенство (7) имаме сума от две положителни събираеми, всяко от които е по-голямо от положителния член в дясната страна на равенството:

$$\sqrt{x+1} > \sqrt{x} \quad \wedge \quad \sqrt{x+2} > \sqrt{x}.$$

Следователно $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} > 2\sqrt{x} > \sqrt{x}$, т. е. нарушено е необходимото условие (в).

Множеството от решенията на това уравнение е празното множество. $\square$

Задача 3.3 ([1], стр. 81, задача 1)**.** *Да се реши уравнението*

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7. \tag{8}$$

Решение. Уравнение (8) е от тип (∗) и е дефинирано точно когато са дефинирани двете му събираеми, т. е. при $x+5 \geq 0 \ \wedge \ 2(x+4) \geq 0$. Дефиниционното множество за това уравнение е $x \in [-4, +\infty)$.

Всяко от неотрицателните събираеми в лявата страна на равенството трябва да е не по-голямо от числото 7 в дясната страна на равенството.

Понеже при $x \geq -4$ първото събираемо е не по-малко от 1, то второто събираемо по необходимост трябва да е не по-голямо от 6, т. е.:

$$1 \leq \sqrt{x+5} \leq 7 \ \wedge \ 0 \leq \sqrt{2(x+4)} \leq 6.$$

Решенията, ако такива съществуват, ще са от интервала $[-4, 14]$.

Да положим $u := x + 4$, $u \in [0, 18]$. Даденото уравнение (8) придобива вида

$$\sqrt{u+1} + \sqrt{2\,u} = 7. \tag{9}$$

Да разгледаме функциите $\sqrt{u+1}$ и $\sqrt{2\,u}$ в интервала $u \in [0, \infty)$. Всяка от тях е неотрицателна и монотонно растяща в този интервал. Такава е и тяхната сума, чието множество от стойности е $[1, +\infty)$.

Графиката на функцията $y = 7$ е права линия, успоредна на абсцисната ос.

Следователно, графиките на монотонно растящата функция $y = \sqrt{u+1} + \sqrt{2\,u}$ и константната функция $y = 7$ имат точно една пресечна точка в интервала $u \in [0, \infty)$.

Понеже множеството от стойностите на функцията $y = \sqrt{u+1} + \sqrt{2\,u}$, $u \in [0, 18]$, съдържа интервала $\mathcal{V} = [1, 10]$ като подинтервал, а множеството от стойностите на функцията $y = 7$ е $\mathcal{W} = \{7\}$, то $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \mathcal{W} \neq \emptyset$.

Непосредствена проверка показва, че $u_0 = 8 \in [0, 18]$ е решение на уравнение (9).

Следователно, $u_0 = 8$ е единственото решение на уравнение (9), а $x_0 = 4$ е единственото решение на уравнение (8). $\square$

Задача 3.4 ([1], стр. 81, задача 12)**.** *Да се реши уравнението*

$$\sqrt{2x^2 + 5x + 2} + \sqrt{2x^2 + 5x - 9} = 1. \tag{10}$$

Решение. Да положим в уравнение (10) $u := 2x^2 + 5x$. Стойностите на неизвестното x са положителни при $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup (0, +\infty)$, отрицателни при $x \in \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ и нула при $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = 0$.

При направеното полагане уравнението (10) се преобразува в уравнението

$$\sqrt{u+2} + \sqrt{u-9} = 1 \tag{11}$$

от тип $(*)$.

Уравнение (11) е дефинирано при $u \geq 9$. За тези стойности на неизвестното u първото събираемо в (11) е строго по-голямо от дясната страна на (11), т. е. необходимото условие (в) не е изпълнено и уравнение (11) няма решение. Като следствие от това и уравнение (10) няма решение. $\square$

Задача 3.5 (виж и [1], стр. 81, задача 4)**.** *Колко решения има уравнението*

$$\sqrt{1 + x + x^2} + \sqrt{1 - x + x^2} = 4? \tag{12}$$

Решение. Уравнение (12) е от тип $(*)$ и е дефинирано точно когато са дефинирани и двете му събираеми, т. е. при $x \in (-\infty, +\infty)$, защото

$$x^2 + x + 1 > 0 \ \wedge \ x^2 - x + 1 > 0, \quad \forall\, x \in (-\infty, +\infty).$$

Функцията $p(x) = \sqrt{1 + x + x^2} + \sqrt{1 - x + x^2}$ приема положителни стойности в дефиниционния си интервал. Тя е четна функция, т. е. ординатната ос е ос на симетрия за графиката ѝ. Връх на графиката на функцията $p(x)$ е пресечната точка на графиката ѝ с оста на симетрия, т. е. точката с координати $(0, p(0))$.

Най-малката стойност на $p(x)$ е $p(0) = 2$.

В интервала $(-\infty, 0]$ функцията $p(x)$ е монотонно намаляваща, а в интервала $[0, +\infty)$ е монотонно растяща с множество от стойности $\mathcal{V} = [2, +\infty)$.

Линейната функция $y = 4$ има множество от стойности $\mathcal{W} = \{4\}$ и $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$.

Следователно, графиките на функциите $y = p(x)$ и $y = 4$ имат точно две общи точки, симетрично разположени спрямо оста на симетрия, а уравнение (12) има точно две решения. $\square$

Задача 3.6. *Да се реши уравнението*

$$\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x} = 1.$$

Упътване. Да се използва четността на функцията в лявата му част.

Задача 3.7. *Да се реши уравнението*

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} + \sqrt{x^2 + x} = 1.$$

Решение. Дефиниционното множество за всеки от радикалите е съответно

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -2] \cup [-1, +\infty);$$

$$x^2 + x = x(x+1) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty),$$

а дефиниционното множество на сумата им е

$$x \in (-\infty, -2] \cup \{-1\} \cup [0, +\infty).$$

Да положим $g(x) := \sqrt{x^2 + x}$, $f(x) := \sqrt{x^2 + 3x + 2}$.

Необходимо условие, за да бъде $f(x) + g(x) = 1$, е

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2} \leq 1 \quad \wedge \quad g(x) = \sqrt{x^2 + x} \leq 1.$$

Понеже $f(x)$ е монотонно растяща $\forall\, x \in [0, +\infty)$ и $f(x) > \sqrt{2} > 1$, $\forall\, x \in [0, +\infty)$, то $f(x) + g(x) > 1$, $\forall\, x \in [0, +\infty)$.

Следователно, необходимите неравенства (в) не са изпълнени в подинтервала $[0, +\infty)$ на дефиниционното множество и задачата няма решение в този подинтервал.

Нека сега $x \in (-\infty, -2]$. Функцията $g(x)$ е монотонно намаляваща в този подинтервал на дефиниционното множество и най-малката ѝ стойност е $g(-2) = \sqrt{2} > 1$.

Следователно, необходимите неравенства (в) не са изпълнени и в този подинтервал на дефиниционното множество.

При $x = -1$ имаме $f(-1) = g(-1) = 0$ и $f(-1) + g(-1) = 0 < 1$.

Задачата няма решение. $\square$

Задача 3.8. *Да се реши уравнението*

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - x} = 1.$$

Задача 3.9. *Да се реши уравнението*

$$\sqrt{4x^2 - \frac{1}{4}} + \sqrt{4x^2 + 4x + \frac{3}{4}} = 1.$$

Решение. Да положим $f(x) := \sqrt{16x^2 - 1}$, $g(x) := \sqrt{16x^2 + 16x + 3}$.

Даденото уравнение добива вида $f(x) + g(x) = 2$.

Дефиниционното множество за всеки от радикалите е съответно

$$\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, +\infty\right), \quad \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right] \cup \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right),$$

а дефиниционното множество за сумата им е

$$x \in \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right] \cup \left\{-\frac{1}{4}\right\} \cup \left[\frac{1}{4}, +\infty\right).$$

Необходимо условие, за да бъде $f(x) + g(x) = 2$, е

$$f(x) \leq 2 \quad \wedge \quad g(x) \leq 2.$$

В случая, когато $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right]$ и двете функции са неотрицателни и монотонно намаляващи. Минималните им стойности са $f\left(-\frac{3}{4}\right) = 2\sqrt{2} > 2$, $g\left(-\frac{3}{4}\right) = 0$. В този интервал задачата няма решение.

В случая, когато $x \in \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$ и двете функции са неотрицателни и монотонно растящи. Минималните им стойности са $f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$, $g\left(\frac{1}{4}\right) = 2\sqrt{2} > 2$. И в този интервал задачата няма решение.

При $x = -\frac{1}{4}$ имаме $f\left(-\frac{1}{4}\right) = g\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$.

Задачата няма решение. $\square$

Задача 3.10. *Да се реши уравнението*

$$\sqrt{4x^2 - \frac{1}{4}} + \sqrt{4x^2 - 4x + \frac{3}{4}} = 1.$$

Задача 3.11. *Да се реши уравнението*

$$\sqrt{4x^2 - 1} + \sqrt{4x^2 - 4x + \frac{3}{4}} = 1.$$

4. Задачи от тип (**). Задачите от тази група са конкретни примери за уравнения от тип (**).

Задача 4.1 ([1], стр. 81, задача 10)**.** *Да се реши уравнението*

$$\sqrt{3x + 4} + \sqrt{2x + 3} = \sqrt{5x + 7}. \tag{13}$$

Решение. Уравнението е дефинирано точно когато са дефинирани и трите му члена, т. е. при $x \in \left[-\frac{4}{3}, +\infty\right)$, защото $-\frac{3}{2} < -\frac{7}{5} < -\frac{4}{3}$.

Понеже $\sqrt{5x + 7} = \sqrt{(3x + 4) + (2x + 3)}$, то задачата се свежда до решаване на ирационално уравнение от вида (**), в което $w = 0$:

$$\sqrt{3x + 4} + \sqrt{2x + 3} = \sqrt{(3x + 4) + (2x + 3)}; \quad 3x + 4 \geq 0,\ 2x + 3 \geq 0.$$

Съгласно теорията **1.3.** решението на това уравнение е $\{3x + 4 = 0\} \vee \{2x + 3 = 0\}$.

Отчитайки дефиниционното множество получаваме, че уравнение (13) има решение $x_0 = -\frac{4}{3}$. $\square$

Задача 4.2 ([1], стр. 81, задача 14)**.** *Да се реши уравнението*

$$\sqrt{x + 5} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{2x + 7}. \tag{14}$$

Решение. Уравнението е дефинирано точно когато са дефинирани и трите му члена, т. е. при $x \in [-3, +\infty)$.

Понеже $\sqrt{2x + 7} = \sqrt{(x + 5) + (x + 3) - 1}$, то задачата се свежда до решаване на ирационално уравнение от вида (**), в което $w = -1$. Следователно уравнение (14) няма решение. $\square$

Задача 4.3 ([1], стр. 81, задача 2)**.** *Да се реши уравнението*

$$\sqrt{x} + \sqrt{2x + 1} = \sqrt{6x + 1}. \tag{15}$$

Решение. Дефиниционното множество за уравнение (15) е $x \in [0, +\infty)$.

Понеже $\sqrt{6x+1} = \sqrt{(x)+(2x+1)+(3x)}$, то уравнение (15) е от типа (∗∗), в което $w = 3x \geq 0$.

Следователно уравнение (15) е еквивалентно на уравнението $2\sqrt{x(2x+1)} = 3x$, чиито решения са $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$. □

Задача 4.4 ([1], стр. 81, задача 11)**.** *Да се реши уравнението*

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = \sqrt{5x+7}. \tag{16}$$

Решение. Уравнение (16) е дефинирано при $x \geq -\frac{1}{3}$, т. е. в интервала $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

Понеже $\sqrt{5x+7} = \sqrt{2(x+3)+(3x+1)}$, то уравнение (16) е от типа (∗∗), в което

$$w = x + 3 > 0.$$

От уравнение (16) получаваме еквивалентното уравнение

$$2\sqrt{3x+1} = \sqrt{x+3},$$

чието решение е $x_0 = -\frac{1}{11} \in \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$. □

Горните изследвания дават метод за анализ, съставяне и решаване на конкретни задачи от даден тип.

ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Моденов. Сборник задач специальному курсу элементарной математики. Советская наука, Москва, 1957.

[2] `http://www.fmi.uni-sofia.bg/priem/matItema324.03.2013.pdf`

[3] `http://www.fmi.uni-sofia.bg/exams/drzhaven-izpit/temi-drzhaven-izpit/matematika-i-informatika/DIMI09.2010.pdf`

Веселка Михова
e-mail: mihova@fmi.uni-sofia.bg
Юлия Нинова
e-mail: julianinova@fmi.uni-sofia.bg
Факултет по математика и информатика
СУ „Св. Климент Охридски“
бул. Дж. Баучер 5
1164 София

SOLVING SOME SPECIAL TYPES OF PROBLEMS

Vesselka Mihova, Julia Ninova

This article discusses conditions under which, if satisfied, it is reasonable to study the existence of solutions of some special types of equations. We consider three groups of specific problems.