*МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2015*
*MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2015*
*Proceedings of the Forty Fourth Spring Conference*
*of the Union of Bulgarian Mathematicians*
*SOK "Kamchia", April 2–6, 2015*

# АКАДЕМИК СТАНИМИР ТРОЯНСКИ НА 70 ГОДИНИ

**Р. Малеев**

На 12 октомври 2014 г. навърши 70 години забележителният български математик, известен в математическия свят аналист, специалист по геометрия на банаховите пространства и тополог,

**проф. Станимир Любенов Троянски**

действителен член на БАН и чуждестранен член-кореспондент на Кралската академия на точните, физическите и природните науки в Мадрид, Испания. Троянски е роден във Варна в лекарско семейство. Баща му е бил известен пулмолог, починал рано от туберкулоза, а майка му – акушер-гинеколог. Математическите му способности се проявяват още в училище, когато решава да стане математик. Завършва с отличен успех гимназия в родния си град през 1962 г. и след конкурс заминава да следва математика в Университета в Харков, СССР. Механо-математическият факултет на харковския университет, който сега е на 210 години, има забележителни традиции – там са работили М. В. Остроградский, В. А. Стеклов, А. М. Ляпунов, С. Н. Бернщайн, а по време на следването на Троянски и Н. И. Ахиезер, Б. Я. Левин, А. В. Погорелов, В. А. Марченко, М. С. Лифшиц, М. И. Кадец и др. съветски математици. Троянски е сред най-изявените студенти по всички дисциплини, но когато трябва да избере направление за дипломната си работа в трети курс предпочитанията му се насочват най-вече към функционалния и комплексния анализ. В крайна сметка е приет за дипломант по геометрия на банаховите пространства при проф. Кадец, след като за три месеца успява да се справи с тестовата задача да докаже със собствени сили аналога в $\mathfrak{R}^n$ на теоремата на Риман за множеството от сумите на пермутациите на условно сходящите редове, известен като теорема на Леви-Щайниц (ЛЩ). Хвърлените усилия не отиват напразно. Математическият талант и пробивна сила на Троянски се проявяват още в университета. В една от първите си публикувани работи, още на студентската скамейка, той построява първи пример на безкрайномерно пространство на Фреше, в което е вярно твърдението на теоремата на Леви-Щайниц[1] и доказва, че в равномерно гладко банахово пространство с модул на гладкост $\rho$ това твърдение е в сила за всеки условно сходящ ред $\sum x_n$, удовлетворяващ допълнителното условие $\sum \rho(x_n) < \infty$. В 1966 г. Кадец доказва топологическата еквивалентност на всички сепарабелни банахови пространства. В друга студентска работа Троянски доказва, че $c_0(\Gamma)$ и $l_1(\Gamma)$ са хомеоморфни за произволно $\Gamma$, т.е. и за неизброимо $\Gamma$, което засилва увереността, че и всички банахови несепарабелни пространства с еднакъв density character са хомеоморфни – резултат получен от Торунчик през 1981 г.

Изследванията на Троянски, посветени на хомеоморфизми на несепарабелни банахови пространства, успешно продължават и след края на казармата (лятото на 1968 г.) с подготовката на кандидатската му дисертация „Топологическая эквивалентность некоторых несепарабельных пространств Банаха“. Защитата е в Харков през пролетта на 1970 г. след трудно получено разрешение за провеждането ѝ в чужбина, забавило процедурата с повече от година и поставило под въпрос получаването на софийско жителство, даващо право на работа в София. Паралелно Троянски получава редица резултати по еквивалентно пренормиране на пространства с неизброим безусловен базис, както и обобщение за класове от несепарабелни пространства на известни резултати за сепарабелни пространства на Кадец, Линденщраус, Бесага-Пелчински. Например в банахово пространство $X$ с (неизброим) безусловен базис може да се въведе еквивалентна диференцируема по Фреше норма тогава и само тогава, когато $X$ не притежава подпространство линейно хомеоморфно на $l_1$. Методът на еквивалентното пренормиране, развит от Кадец, и доразвит и систематично прилаган от Троянски, се състои в конструиране в изучаваното банахово пространство на еквивалентна „хубава“ норма, близка до хилбертовата. Например, теоремата на Джеймс-Енфло характеризира класа на суперрефлексивните банахови пространства с това, че те притежават еквивалентни равномерно изпъкнали и равномерно гладки норми. Други еквивалентни норми, използвани в различни приложения, са тези с хубави диференциални свойства, например диференцируеми по Гато или Фреше. Интензивно изучаван в последните десетилетия е класът на банаховите пространства с локално равномерно изпъкнала (ЛРИ) норма. ЛРИ-свойството на нормата е метрично свойство и ЛРИ пространствата са строго изпъкнали и притежават свойството на Кадец-Кли, т.е. нормираната и слабата топология по сферата съвпадат. С помощта на ЛРИ пренормиране се доказват различни теореми от функционалния

[1]Известно е, че аналогът на теоремата на Леви-Щайниц не е верен в безкрайномерни банахови пространства без допълнителни предположения за условно сходящия ред.

анализ, теория на апроксимациите, оптимирането. В „пионерна“ работа от 1971 г. Троянски решава положително проблем, поставен от Линденщраус, като доказва, че всяко слабо компактно породено пространство, в частност всяко рефлексивно пространство, допуска еквивалентно ЛРИ пренормиране, „отваряйки пътя за изследване на ЛРИ и диференцируеми по Фреше норми в несепарабелни пространства“[2]. Като следствие се получава, че всяко изпъкнало слабо компактно подмножество на банахово пространство е изпъкнала обвивка на строго изтъкнатите си точки. Този резултат е известен в литературата като теорема на Линденщраус-Троянски. Във връзка с теоремата на Крейн-Милман, една традиционна област на изследвания на българските математици от по-старото поколение, в по-късни работи на Троянски систематично се изучават различни обобщения на крайните точки. Той доказва, че във всяко сепарабелно банахово пространство съществува ограничено изпъкнало затворено тяло, което притежава не повече от изброимо множество строго крайни точки. Дава пример на $c_0$ наситено банахово пространство, такова че всяко ограничено изпъкнало $w^*$-затворено тяло в спрегнатото пространство съдържа неизброимо множество от изтъкнати точки. Доказва, че в ограничените затворени изпъкнали подмножества на банаховите пространства всяка крайна точка, която е и точка на непрекъснатост е остра.

Своеобразен връх в изследванията на Троянски по ЛРИ пренормиране е получената през 1979 г., чрез въвеждане на изброими покрития, първа линейно-топологична характеризация във вероятностни термини на банаховите пространства, притежаващи ЛРИ еквивалентна норма. Тази идея предхожда въведената по-късно концепция $\sigma$-фрагментируемост. През 1982 г. Троянски става доктор на науките след защита на дисертация, озаглавена „Някои геометрични и апроксимационни задачи от теорията на банаховите пространства“, а през 1985 г. получава за първи път професорско звание във ФМИ на СУ[3]. Друг хубав резултат от това време е положителното решение на задачата за трите пространства за ЛРИ пренормиране на банахови пространства. Използвайки характеризацията на пространствата, допускащи еквивалентно ЛРИ пренормиране, спомената по-горе, Троянски доказва, че всяко строго изпъкнало банахово пространство със свойството на Кадец-Кли е ЛРИ нормируемо. Тези идеи на Троянски са доразвити в поредица от негови съвместни работи с испански тополози от средата на 90-те години на миналия век и първото десетилетие на 21 век. В резултат е получена по-лека за прилагане линейно-топологична характеризация на банаховите пространства, допускащи еквивалентно ЛРИ пренормиране, в термините на изброими покрития, такива че за всяка точка от пространството може да се намери съдържащо я множество с произволно малък диаметър, което е сечение на елемент от покритието и подходящо полупространство. Днес съществуват прости геометрични доказателства, докато оригиналното доказателство използва мощен вероятностен апарат, развит от Троянски по-рано. Необходимите нелинейни „трансферни“ техники за прилагането на споменатата характеризация, позволяващи пренормиране със запазване на хубави свойства на изпъкналост и получаване на всички по-известни резултати за ЛРИ пренормиране, са намерили място в мо-

[2] Цитирането е от монографията "Smoothness and renormings in Banach spaces" на Р. Девил, Ж. Годфроа, В. Зизлер.

[3] След години Троянски става професор в ИМИ БАН и, както изглежда, ще завърши преподавателската си кариера като професор в Университета в Мурсия, Испания.

нографията на А. Молто, Х. Орихуела, С. Л. Троянски, М. Валдивиа „A Non-linear Transfer Technique for Renorming“, излязла през 2009 г. в поредицата Lecture Notes in Math.

Непресъхващото творческо дързновение от една страна и готовността да споделя идеи и знание от друга, свързва Троянски с много от най-известните специалисти по банахови пространства. Плод на научните му контакти с водещи специалисти в областта на неговите интереси са десетки съвместни публикации, темите и резултатите в които съвсем не се изчерпват с ЛРИ банахови пространства. Редица резултати са получени през годините и в съвместни работи с неговите ученици, за които той е бил винаги не само взискателен, но и грижовен учител и съветник. Ще се опитаме накратко да изложим по-долу по-интересните от тях по наше мнение. Поредица от публикации на Троянски са посветени на съществуването на еквивалентни равномерно изпъкнали във всяко направление и равномерно диференцируеми по Гато норми в различни класове от банахови пространства. В съавторство със свои ученици той доразвива тези изследвания и изучава различни свойства на изпъкналост и гладкост на пространствата на Орлич. За тези пространства в суперрефлексивния случай са намерени оценки за модулите на изпъкналост и гладкост относно подходящи еквивалентни норми[4], еквивалентни норми с най-добър порядък на диференцируемост и равномерна диференцируемост по Фреше. Намерена е и точна оценка за порядъка на диференцируемост на бамп функции в редични пространства. В работа с П. Хайек Троянски доказва, че редичните орличеви пространства $h_M$, породени от функции $M$, които не удовлетворяват $\Delta_2$-условието в нулата, притежават еквивалентна аналитична норма точно тогава, когато $h_M$ е или изоморфно на $l_{2n}$ за някое естествено $n$ или изоморфно полиедрално[5]. Той намира точния интервал за $p$, такива че $l_p$ е изоморфно на подпространство на $h_M$. Троянски построява и еквивалентна $p$-пъти диференцируема по Гато норма в $L_p\,(S,\Sigma,\mu)$, $(S,\Sigma,\mu)$ пространство със $\sigma$-крайна мярка, когато $p \geq 1$ е нечетно. Получена през 70-те години от Троянски характеризация на хилбертовите пространства чрез асимптотиката на модулите за изпъкналост и гладкост $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \delta_X(\varepsilon)/\varepsilon^2$ и $\lim\limits_{\tau\to 0} \rho_X(\tau)/\tau^2$ е в основата на нови интересни изследвания на геометричните свойства на равномерно изпъкналите пространства $X$ с квадратична оценка за модула на изпъкналост $\delta_X(\varepsilon) \geq c\varepsilon^2$. С поразително тънки пресмятания, използващи едномерни диференциални неравенства и афинна евклидова геометрия в равнината, колектив, ръководен от Троянски, получава асимптотически точна спрямо еквивалентно пренормиране оценка отгоре за най-добрия възможен степенен порядък на модула на гладкост на $X$. Намерена е и асимптотически точна оценка за типа на тези пространства. Почти всички изброени резултати по еквивалентно пренормиране са подобаващо отразени (някои с подробни доказателства, заемащи цели параграфи) и в станалите вече класически монографии на М. Дей, Normed linear spaces, на Д. Дистел, Geometry of Banach spaces, Lect. Notes in Math., на Й. Линденщраус, Л. Цафрири, Classical Banach spaces I, II, на И. Зингер, Bases in Banach spaces II, както и в споменатата по-горе книга на Годфроа, Девил и Зизлер.

[4]В работа на Фигел беше показано, че оценките са точни в класа на всички еквивалентни норми.

[5]Едно банахово пространство е полиедрално, ако единичното кълбо на всяко негово крайномерно подпространство е политоп

Обект на вниманието на Троянски в последните години са две групи интересни и трудни задачи, намиращи се на границата на геометрията на банаховите пространства и топологията. Получените резултати са плод на сътрудничество, главно с Р. Смит и от части с В. Фонф, Х. Орихуела, А. Паярес. Методите привличат апарата на метризационните теореми, на дескриптивната теория на множествата и функциите, на математическата логика. Първата група задачи са свързани с полиедрални банахови пространства. Полиедралността очевидно е изометрично свойство, което веднага поражда въпроса за съществуване на еквивалентна полиедрална норма. Получено е ефективно достатъчно условие за полиедрално пренормиране в термините на изброими покрития, отнасящи се до границата на Джеймс и въведената топологична концепция от тип фрагментируемост, като метриката е заменена с компактност. С помощта на горния резултат са конструирани еквивалентни полиедрални норми в класове пространства от непрекъснати функции $C\left(K\right)$, $K$ $\sigma$-дискретен компакт, и в класове пространства с неизброим безусловен базис. Получена е характеризация на дърветата $T$, за които пространствата $C_0\left(T\right)$ допускат еквивалентно полиедрално пренормиране. Втората група от задачи се отнася до строго изпъкнало пренормиране. Намерено е необходимо и достатъчно условие в термините на изброими покрития и фамилии от полупространства. Тази характеризация довежда до дефинирането на нов клас от компакти, заемащ междинно място между компактите на Грюнхаге и фрагментируемите компакти. За компактите от адекватни фамилии от множества е доказано, че дескриптивните компакти съвпадат с тези на Грюнхаге.

Натрупаното през годините признание и научен авторитет правят Троянски желан гост като преподавател и изследовател. Бил е гост-професор в университетите в Айова, Бордо, Гранада и Валенсия, в университета Комплутенсе Мадрид и Юнивърсити Колидж Лондон. В последните години е редовен професор в Университета в Мурсия, Испания. През цялата си досегашна кариера той отделя много време и голямо внимание на преподаването на математика. С решаващото му участие, в периода 1985–1999 г., когато е ръководител на катедрата по Математически анализ на ФМИ на СУ, е осъвременено съдържанието и начина на изложение на курса по Математически анализ, а курсът по Функционален анализ става задължителен[6] за студентите по математика. Под негово ръководство седем негови ученици са защитили кандидатски дисертации, двама са професори, а останалите – доценти в България, Испания, САЩ. Като дългогодишен член на СНС по математика, а в началото на 90 години и като председател на НК по математика на ВАК и на НК по математика и механика на ФНИ, Троянски е радетел за високи научни критерии и справедлива обективна оценка на математически постижения. Той има големи заслуги и при създаването и утвърждаването на „Сердика математическо списание“ като дългогодишен главен редактор на това първо специализирано списание по математика у нас.

Цялостната научна и преподавателска дейност досега на Станимир Троянски е събитие в българската, и не само, математика. Най-яркото доказателство на това твърдение е признанието на математическата общност, намерило израз в организираната в Албасете, Испания, 10-13.06.2014 г. международна конференция по „Геометрия на банаховите пространства в чест на 70-годишнината на С. Троянски“ с

[6] Това, за съжаление, вече не е така.

пленарни доклади от повечето от най-известните специалисти в областта и с повече от 30 други доклади и съобщения. Научните изследвания и лекторската дейност на Троянски продължават. Той има какво още да даде на математиката. Остава да се надяваме, че ще се радва още години напред на добро здраве и ще има време между математическите занимания и риболова за многобройните си приятели в българската математическа колегия.

София, януари 2015

ПП Настоящите бележки нахвърлих в отговор на покана от Програмния комитет на 44 Пролетна конференция на СМБ да споделя мисли по повод годишнината на С. Троянски, с когото постъпихме по едно и също време на работа в ИМИ в далечната 1967 г. преди почти половин век. В, както е прието да се казва сега, очевиден конфликт на интереси като ученик и близък приятел на юбиляра, се постарах максимално да се въздържам от суперлативи, каквито научната и преподавателската дейност на С. Троянски безспорно заслужават.

Румен Малеев
Факултет по математика и информатика
Софийски университет
бул. Дж. Баучер № 5
1164 София
e-mail: maleev@fmi.uni-sofia.bg