МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2015
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2015
Proceedings of the Forty Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
SOK "Kamchia", April 2–6, 2015

АПОЛАРНОСТ*

Благовест Сендов, Христо Сендов

Лекцията се основава на съвместната работа [3]. Едно обобщение на аполарност се използва за дефиниране на понятието *локус на комплексен полином.* Като приложение на теорията на локусите се доказва следната теорема на Рол за комплексни полиноми:

Нека Ω е обединение на двата диска $D[-c;r]$ и $D[c;r]$ с центрове $-c$ и c и радиус r, където

$$c = \cot\frac{2\pi}{n},\quad r = \sin^{-1}\frac{2\pi}{n};\quad n \geq 3.$$

Ако $p(z)$ е комплексен полином от степен $n \geq 3$, с $p(-i) = p(i)$, тогава има поне едно $\zeta \in \Omega$, такова, че $p'(\zeta) = 0$.

Тази теорема е по-силна от известните класически теореми на Рол за комплексни полиноми.

1. Теорема на Грейс. Нека $\mathcal{P}_n$ е множеството от всички комплексни полиноми от точно n-та степен и $\overline{\mathcal{P}}_n = \bigcup_{s=0}^{n} \mathcal{P}_s$.

Класическото определението на понятието аполарност е следното, виж [2, p. 102].

Дефиниция 1. *Два полинома*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0,\quad q(z) = b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_0 \in \mathcal{P}_n$$

се наричат **аполарни**, *ако*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{a_{n-k}b_k}{\binom{n}{k}} = 0, \tag{1}$$

Класическата теорема на Грейс гласи, виж [2, стр. 107]:

Теорема 1. (Грейс) *Нека $p(z)$ и $q(z)$ са аполарни полиноми. Тогава всяка кръгова област, съдържаща всички нули на един от тях, съдържа поне една нула на другия.*

Условието за аполарност произхожда от теорията на алгебричните криви и повърхнини, където то има геометричен смисъл. Това условие е не само достатъчно, но и необходимо за теоремата на Грейс. Наистина:

---

*2010 **Mathematics Subject Classification:** 30C10.

Ключови думи: нули и критични точки на полиноми, аполарност, локус, локус холдер, теорема на Рол за комплексни полиноми.

За това изследване, първият автор е частично подкрепен от Националният Научен Фонд в България, проект FNI I 02/20 "Efficient Parallel Algorithms for Large-Scale Computational Problems".

Твърдение 1. *Нека $A_n(p,q)$ е функционал, дефиниран в $\mathcal{P}_n$. Ако от $A_n(p,q)=0$ следва, че всяка кръгова област съдържаща всички нули на един произволен полином, съдържа и поне една нула на всеки аполарен на него полином, тогава*

$$A_n(p,q) = C(p,q)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{a_{n-k}b_k}{\binom{n}{k}},$$

където $C(p,q)\neq 0$ е константа или функционал, дефиниран в $\mathcal{P}_n$.

Доказателството е много просто. Нека

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = (az-c)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}a^k c^{n-k}$$

и

$$q(z) = b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_0 = (bz-d)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}b^k d^{n-k}.$$

Нека всяка кръгова област съдържаща всички нули на p съдържа поне една нула на q. Но всички нули на p са в точката d/b. Следователно

$$0 = (-1)^n b^n p(d/b) = (ad-bc)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(ad)^k(bc)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{a_k b_{n-k}}{\binom{n}{k}}.$$

Това приключва доказателството. $\square$

Ще докажем, че изборът на кръгови области в теоремата на Грейс е също необходим.

Дефиниция 2. *Затвореното множество Ω върху комплексната равнина, съдържащо поне две различни точки, наричаме* **множество на Грейс** *ако има следното свойство:*

Ако $p(z)$ е произволен полином на който всички нули са в Ω и $q(z)$ е друг произволен полином аполарен на $p(z)$, тогава поне една нула на $q(z)$ е в Ω.

Твърдение 2. *Всяко множество на Грейс е кръгова област.*

Доказателство. Нека Ω е ограничено, т.е. е диск. Неограниченият случай, когато Ω е полуравнина, се доказва по аналогичен начин.

Нека $D(\Omega)$ е най-малкият диск, който съдържа Ω и кръгът $C(\Omega)$ е контурът на $D(\Omega)$. Тъй като Ω е затворено множество и съдържа поне две различни точки, има поне две различни точки $u_1, u_2 \in C(\Omega)$. Имайки предвид, че линейна трансформация не променя ситуацията, можем да смятаме, че $u_1=-1,\ u_2=1,\ u_1,u_2\in C(\Omega)$.

Да вземем полинома $f(z)=z^2-1$. Всеки аполарен на $f(z)$ полином има вида $g(z)=c(z^2-2az+1);\ c\neq 0$, където a е произволно комплексно число. Нулите на $g(z)$ са

$$\zeta_1 = a+\sqrt{a^2-1},\quad \zeta_2 = a-\sqrt{a^2-1}$$

и за всяко $a\in\mathcal{C}$, имаме $\zeta_2 = 1/\zeta_1$. Следователно, ако ζ_1 е вътре в $D(\Omega)$, тогава ζ_2 е извън $D(\Omega)$ и обратното. От това следва, че Ω съвпада с $D(\Omega)$. С това доказателството е завършено. $\square$

1.1. Приложения на теоремата на Грейс. В някой важни приложения на теоремата на Грейс, един от полиномите е фиксиран. Класически пример е теоремата на Рол за комплексни полиноми.

Дефиниция 3. *Затвореното множество R_n се нарича* **множество на Рол**

ако за всеки комплексен полином $p(z)$ от степен $n \geq 2$ и $p(-i) = p(i)$, съществува поне едно $\zeta \in R_n$, такова че $p'(\zeta) = 0$.

Теоремата X се нарича теорема на Рол за комплексни полиноми, ако в нея се твърди, че дадено множество R_n^X е множество на Рол.

Теоремата на Рол X е по-силна от теоремата на Рол Y, ако $R_n^X \subset R_n^Y$ и $R_n^X \neq R_n^Y$.

Теоремата на Рол X е **точна**, *ако R_n^X е минимално по включване.*

Теорема 2. (Грейс-Хейвуд) *Дискът*

$$R_n^{GH} = D\left[0; \cot\frac{\pi}{n}\right] = \left\{z:\ |z| \leq \cot\frac{\pi}{n}\right\}$$

е множество на Рол.

Доказателството на тази теорема следва непосредствено от теоремата на Грейс.

Нека $f(z)$ е произволен комплексен полином от степен $n+1$ и $f(-i) = f(i)$. Ако

$$f'(z) = q(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n,$$

тогава от $f(-i) = f(i)$ следва, че

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k}{2k+1} b_{n-2k} = 0,$$

следователно полиномът $q(z)$ е аполарен на фиксирания полином

$$\kappa_n(z) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{n-2k} z^{n-2k} = \frac{i}{2(n+1)} \left[(z-i)^{n+1} - (z+i)^{n+1}\right]$$

с корени

$$\zeta_{n.k} = \cot\frac{k\pi}{n+1}; \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

От това и Теорема 1 следва Теорема 2.

За доказателството на една теорема на Рол за комплексни полиноми е достатъчно да намерим едно множество на Грейс за един фиксиран полином, не за произволен такъв. Това множество може да е по-малко и съответната теорема по-силна. Това ни мотивира да въведем понятието **локус на полином**.

2. Локус холдер на полином. В разширената комплексна равнина $\mathcal{C}^* := \mathcal{C} \cup \{\infty\}$, Евклидовото разстояние между една точка $z \in \mathcal{C}$ и $\infty \in \mathcal{C}^*$ е ∞. В $\mathcal{C}^*$ се използва още така нареченото *хордово разстояние* между две точки z_1 и z_2 дефинирано по следния начин:

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} \quad \text{if} \;\; z_1, z_2 \in \mathcal{C},$$

$$\chi(z_1, \infty) = \chi(\infty, z_1) = \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} \quad \text{if} \;\; z_1 \in \mathcal{C}$$

и $\chi(\infty, \infty) = 0$.

Като използваме $\chi(z, u)$ между две точки в $\mathcal{C}^*$, можем да дефинираме съответното Хаусдорфово разстояние между две затворени множества върху $\mathcal{C}^*$.

Дефиниция 4. *Нека $A, B \subset \mathcal{C}^*$ са две затворени точкови мнвожества. Дефи-*

нираме:

$$d(A;B) := \max\{\min\{\chi(z,u) :\ u \in B\} :\ z \in A\},$$
$$d(B;A) := \max\{\min\{\chi(z,u) :\ u \in A\} :\ z \in B\}.$$

Тогава $\chi(A,B) := \max\{d(A;B), d(B;A)\}$ *се нарича* χ**-Хаусдорфово разстояние** *между* A *и* B.

Добре известно е:

Твърдение 3. *Множеството от всички затворени подмножества на* $\mathcal{C}^*$*, метризирано с* χ*-Хаусдорфовото разстояние е компактно.*

За полинома $p(z) \in \mathcal{P}_n$, разглеждаме неговата *симетризация* с n променливи. Това е мулти-афинен симетричен полином на n комплексни променливи $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathcal{C}$:

$$P(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} S_k(z_1, z_2, \dots, z_n), \tag{2}$$

където

$$S_k(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_k}, \quad S_0(z_1, z_2, \dots, z_n) := 1$$

са елементарните симетрични полиноми от степен $k = 1, 2, \dots, n$.

Очевидно $p(z) = P(z, z, \dots, z)$. n-торката $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ се нарича *решение* на $p(z)$ ако $P(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$.

Нека $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ е решение на $p(z)$. От (2) следва, че

$$P(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{z_n}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k a_k}{\binom{n-1}{k-1}} S_{k-1}(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} S_k(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) = 0,$$

където

$$P'(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k a_k}{\binom{n-1}{k-1}} S_k(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$$

е симетризацията на $p'(z)$. Ако $P'(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) = 0$, то $P(z_1, z_2, \dots, z_n)$ не зависи от z_n и $Z' = \{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\} \subset Z$ е решение на $p'(z)$. Тогава $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ е решение на $p(z)$ за всяка стойност на z_n. В такъв случай ние разглеждаме множеството

$$Z = \{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, \infty\} \subset \mathcal{C}^*$$

като решение на $p(z)$.

Дефиниция 5. *Решението*

$$\{z_1, z_2, \dots, z_{n-k}, \underbrace{\infty, \infty, \dots, \infty}_{k}\} \subset \mathcal{C}^*; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

се нарича **нормално***, ако* $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-k}\}$ *не е решение на* $p^{(k)}(z)$.

От Дефиницията 5 следва нещо много полезно:

Твърдение 4. *В едно нормално решение, всяка крайна точка може да се представи като неконстантна рационална функция на останалите крайни точки в* *това решение.*

От Твърдението 3 следва

Твърдение 5. *Множеството от всички решения на даден полином $p(z) \in \mathcal{P}_n$ е затворено по отношение на χ-Хаусдорфовото разстояние.*

Сега ще дадем една по-широко определение на класическото понятие за аполарност.

Дефиниция 6. *Полиномът*

$$q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_0 \in \overline{\mathcal{P}}_n,$$

се нарича аполарен с $p(z) \in \overline{\mathcal{P}}_n$ ако

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\binom{n}{k}} a_{n-k} b_k = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k p^{(n-k)}(0) q^{(k)}(0) = 0. \tag{3}$$

Тази дефиниция на аполарност разширява Дефиниция 1 защото тя зависи от n. По-специално, тя допуска водещият коефициент на $p(z)$ или на $q(z)$ да е 0.

Във връзка с горното приемаме:

Дефиниция 7. *Ако $p(z) \in \overline{\mathcal{P}}_n$ има степен $m \leq n$,, тогава* ∞ е нула на $p(z)$ с кратност $n - m$.

Следната Лема се доказва лесно, затова ще изпуснем нейното доказателство.

Лема 1. *n-торката*

$$\{z_1, z_2, \ldots, z_{n-k}, \underbrace{\infty, \infty, \ldots, \infty}_{k}\} \subset \mathcal{C}^*$$

е решение на $p(z) \in \mathcal{P}_n$ тогава и само тогава, когато полиномът $q(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_{n-k})$ е аполарен на $p(z)$.

За неизродената Мьобиосова трансформация

$$T(z) = (az + b)/(cz + d) \quad \text{с} \quad ad - bc \neq 0 \tag{4}$$

и полинома $p(z) \in \overline{\mathcal{P}}_n$, дефинираме

$$T[p](z) := (cz + d)^n p(T(z)). \tag{5}$$

Операторът $T[p]$ изобразява $\overline{\mathcal{P}}_n$ в себе си. Ще ни е нужен следният известен факт, виж [2, Remark 3.3.4, p. 103].

Лема 2. *Ако $p(z), q(z) \in \overline{\mathcal{P}}_n$ са аполарни, то $T[p](z)$ и $T[q](z)$ са също аполарни.*

Всъщност, твърдението в Лема 2, дадена в [2, Remark 3.3.4, p. 103], изисква двата полинома $p(z)$ и $q(z)$ да имат степен n, а също така $T[p](z)$ и $T[p](z)$ да имат степен n. Въпреки това, доказателството е аналогично, защото се основава на това, че всяка Мьобиосова трансформация с $ad - bc \neq 0$ е композиция на трансформации от вида $1/z$ и $az + b$ за $a \neq 0$. Не е трудно да се види, че Лема 2 е вярна за такива трансформации.

Разширението на понятието аполарност води до разширение на теоремата на Грейс, виж [3],

Теорема 3 (Разширена теорема на Грейс)**.** *Ако $p(z), q(z) \in \overline{\mathcal{P}}_n$ са аполарни, тогава всяка кръгова област, която съдържа всички нули на $p(z)$ съдържа поне една нула на $q(z)$ и обратното.*

Сега ще въведем едно важно понятие.

Дефиниция 8. *Нека Ω е затворено множество в $\mathcal{C}^*$. Наричаме Ω локус холдер на $p(z) \in \mathcal{P}_n$ ако Ω съдържа поне една крайна точка от всяко решение на $p(z)$.*

Минимален по включване локус холдер Ω се нарича локус на $p(z)$.

Лесно се вижда, че:

Твърдение 6. *За да се дефинира локус холдер на $p(z)$, е достатъчно да се използват само нормалните решения на $p(z)$.*

Ще ни е нужна още следната теорема, виж [3], която сочи, че понятието локус холдер е инвариантно относно Мьобиосова трансформация.

Теорема 4. *Нека T е дефинирано чрез (4) и $p(z) \in \mathcal{P}_n$. Тогава множеството Ω е локус холдер на $p(z)$ тогава и само тогава, когато $T^{-1}(\Omega)$ е локус холдер на $T[p](z)$.*

3. Теорема за съвпадение на аргумента. За $\alpha, \beta \in [-\pi, \pi]$ и $u \in \mathcal{C}$, дефинираме сектора

$$S(\alpha, \beta) := \left\{re^{i\varphi} : r \geq 0,\ \alpha \leq \varphi \leq \beta\right\}.$$

Дефиниция 9. *Секторът $S(\alpha, \beta)$ се нарича свободен от нули за полинома $p(z) \in \mathcal{P}_n$ ако той не съдържа нула на $p^{(k)}(z)$ за някое $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.*

Теорема 5 (Съвпадение на аргумента)**.** *Нека секторът $S(\alpha, \beta)$ е свободен от нули за $p(z) \in \mathcal{P}_n$. Ако има решение на $p(z)$ в $S(\alpha, \beta)$, тогава за всяко $\psi \in [\alpha, \beta]$ съществува решение на $p(z)$ във формата*

$$\left\{r_1 e^{i\psi}, r_2 e^{i\psi}, \ldots, r_\ell e^{i\psi}\right\} \tag{6}$$

за някакви $r_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ и някое $\ell \geq 2$. Освен това, поне едно от числата $\{r_1, r_2, \ldots, r_\ell\}$ е отлично от нула.

Доказателство. Първо ще докажем, че има поне един такъв ъгъл ψ. След това ще докажем, че решение от вида (6) съществува за всяко $\psi \in [\alpha, \beta]$.

Нека $Z \subset S(\alpha, \beta)$ е решение на $p(z)$. Означаваме с $\alpha(Z), \beta(Z) \in [-\pi, \pi]$; $\alpha(Z) \leq \beta(Z)$, такива че $S(\alpha(Z), \beta(Z))$ е най-малкият сектор съдържащ Z. От Твърдение 5 следва, че съществува решение $Z^* \in S(\alpha, \beta)$ за което

$$\beta(Z^*) - \alpha(Z^*) \leq \beta(Z) - \alpha(Z)$$

за всяко Z on $S(\alpha, \beta)$.

Ако $\alpha' = \alpha(Z^*) = \beta' = \beta(Z^*)$, първата стъпка е доказана. Да допуснем, че $\alpha' < \beta'$ и

$$Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_{n-s}, \underbrace{\infty, \infty \ldots, \infty}_{s}\}$$

е нормално решение на $p(z)$ в $S(\alpha', \beta')$ с минимален брой крайни точки върху контура на $S(\alpha', \beta')$. Има поне две такива точки, защото $S(\alpha', \beta')$ е свободен от нули за $p(z)$. Без ограничение на общността, можем да допуснем, че $z_1 = r_1 e^{i\alpha'}$ и $z_2 = r_2 e^{i\beta'} \neq z_1$.

Нека $P^{(s)}(z_1, \ldots, z_{n-s})$ е симетризацията на $p^{(s)}(z)$ с $n - s$ променливи. Вземаме Мьобиосовата трансформация $T(z_1) = z_2$, дефинирана от $P^{(s)}(z_1, \ldots, z_{n-s}) = 0$ след фиксиране на точките $z_3, z_4, \ldots, z_{n-s}$. Съгласно Твърдение 4, $T(z_1) = z_2$ не е изродено.

Нека $C(z_1, z_2)$ е общият кръг на двойката (z_1, z_2), дефиниран от трансформацията $T(z_1) = z_2$ и да означим с ζ_1, ζ_2 фиксираните точки на тази трансформация. *Общ кръг* на двойка от точки по отношение на Мьобиосова трансформация T е единственият кръг C, такъв че, когато z_1 се движи върху C, тогава z_2 се движи върху същия кръг в обратна посока. Този общ кръг е добре дефиниран, защото $z_1 \neq z_2$. Двете точки z_1 и z_2 се срещат върху фиксираните точки, които са корените на квадратното уравнение $T(\zeta) = \zeta$.

Ако една от фиксираните точки, да речем ζ_1, е вътре в $S(\alpha', \beta')$, тогава можем да сложим z_1 и z_2 върху ζ_1 и да получим решение с по-малко точки върху контура на $S(\alpha', \beta')$, което е противоречие. Следователно и двете фиксирани точки не са вътре в сектора $S(\alpha', \beta')$.

Началото (точката $z = 0$) не е вътре в общия кръг $C(z_1, z_2)$, защото в противен случай, едната от фиксираните точки ще е върху дъгата между z_1 и z_2, вътре в сектора $S(\alpha', \beta')$. От всичко това следва, че разглежданият общ кръг пресича контура на $S(\alpha', \beta')$ в още две точки: $u_1 = \rho_1 e^{i\alpha'}$ и $u_2 = \rho_2 e^{i\beta'}$. Тъй като фиксираните точки не са вътре в сектора $S(\alpha', \beta')$, има две възможности:

1) $\rho_1 \geq r_1$ и $\rho_2 \leq r_2$ или

2) $\rho_1 \leq r_1$ и $\rho_2 \geq r_2$.

Поради симетрията, достатъчно е да разгледаме само случая 1).

Да означим с $\nu \in [0, \pi/2]$ ъгълът под който кръгът $C(z_1, z_2)$ пресича контура на $S(\alpha', \beta')$ в точка z_1 и с $\mu \in [0, \pi/2]$, ъгълът под който кръгът $C(z_1, z_2)$ пресича контура на $S(\alpha', \beta')$ в точка z_2.

Ако $\nu < \mu$, ние можем да местим z_2 върху контура $S(\alpha', \beta')$ и извън кръга $C(z_1, z_2)$. Тогава z_1 ще се премести върху един кръг C' и вътре в кръга $C(z_1, z_2)$. Тъй като Мьобиосовата трансформация запазва ъглите, z_1 ще попадне вътре в $S(\alpha', \beta')$. Това е противоречие.

Ако $\nu \geq \mu$, ние можем да местим z_1 върху контура на $S(\alpha', \beta')$ и извън кръга $C(z_1, z_2)$. Тогава z_2 ще се премести върху един кръг C'' и вътре в кръга $C(z_1, z_2)$, което пак води до противоречие. Отбележете, че C'' е кръг, а не права линия. Това завършва доказателството на първата част.

За да докажем втората част да разгледаме множеството на всички ъгли ψ в $[\alpha, \beta]$ за които съществува решение на $p(z)$ от вида (6). Съгласно Твърдение 4, това множество е затворено.

Да допуснем, че съществува ъгъл $\theta \in [\alpha, \beta]$ за който не съществува решение на $p(z)$ от вида $\left\{r_1 e^{i\theta}, r_2 e^{i\theta}, \ldots, r_n e^{i\theta}\right\}$. Нека ψ е най-близкият ъгъл до θ за който съществува решение от вида (6). Без загуба на общност можем да приемем, че $\alpha \leq \theta < \psi$. Тъй като $S(\alpha, \beta)$ е свободен от нули относно $p(z)$, в разглежданото решение има поне две различни точки, да речем $z_1 = r_1 e^{i\psi}$ и $z_2 = r_1 e^{i\psi}$ с общ кръг $C(z_1, z_2)$. Като фиксираме точките $z_3, z_4, \ldots, z_n$, ние можем да преместим достатъчно малко z_1 върху кръга $C(z_1, z_2)$, като намалим нейният аргумент. Тогава точката z_2 ще се премести също върху $C(z_1, z_2)$ в противна посока и следователно също ще намали своя аргумент. Тогава фиксираме точката z_2 постъпваме с двойката (z_1, z_3) по същия начин както предишната двойка (z_1, z_2). Като направим това с всички крайни точки на разглежданото решение ще получим едно ново решение, което е вътре в сектора $S(\alpha, \psi - \epsilon)$; $\epsilon > 0$. Но съгласно първата част на доказателството, в този сектор има решение от вида (6). Това противоречи на избора на ъгъла ψ, с което се приключва доказателството на теоремата. $\square$

4. Секторна теорема. Теоремата на Грейс дефинира локус холдер, който е диск. За всеки полином има точно един минимален диск, който е негов локус холдер. Интересно е да намерим локус холдер, който се състои от два диска. Поради инвариантността на локус холдерите относно трансформацията на Мьобиус, този проблем се свежда до намиране на локус холдер, които е обединение на две полуравнини, т.е., сектор.

Нека P_n^+ е множеството от всички алгебрични полиноми от степен n с реални и неотрицателни коефициенти. Означаваме с $S(\varphi) = \{z: \ |\arg(z)| \geq \varphi \in [0, \pi], \ z \in \mathcal{C}\}$ сектор в $\mathcal{C}$. Нека $P_n^+(\varphi)$ е множеството на всички полиноми от P_n^+ с нули върху $S(\varphi), \ \varphi \in [0, \pi]$.

Ще докажем един аналог на теоремата на Гаус-Лукас, виж [2, стр. 71].

Теорема 6 (Секторна теорема)**.** *Ако $p(z) \in P_n^+(\varphi)$ и $n \geq 2$, то $p'(z) \in P_{n-1}^+(\varphi)$.*

Ясно е, че Теорема 6 е вярна за $\varphi \in [\pi/2, \pi]$, съгласно теоремата на Гаус-Лукас, тъй като в този случай секторът $S(\varphi)$ е изпъкнало множество.

Тъй като нулите на един полином са непрекъснати функции на неговите коефициенти и обратно, достатъчно е да разглеждаме полиноми от P_n^+ със строго положителни коефициенти и прости нули.

Твърдение 7. *Нека $p(z) \in P_n^+$ няма нули върху лъча $L(\theta) = \{z: \ z = te^{i\theta}; \ t \geq 0\}$. Да означим с $\Delta(p; \theta)$ нетното изменение на $\arg(p(z))$ когато z изминава лъча $L(\theta)$ от 0 до ∞. Тогава е в сила равенството $\Delta(p; \theta) = n\theta - 2m\pi$, където m е броят на нулите на $p(z)$ с аргументи $\varphi \in (0, \theta)$.*

Доказателство. За достатъчно големи r имаме $arg(p(re^{i\psi})) = n\psi + O(1/r)$, следователно изменението на аргумента на $p(re^{i\psi})$ за фиксирано r, когато ψ расте от 0 до θ е равно на $n\theta + O(1/r)$. Доказателството на Твърдението следва от Принципа на аргумента, тъй като $\arg(p(z)) = 0$ върху положителната реална ос. $\square$

Геометрически е ясно, че:

Твърдение 8. *Ако $u(t)$ и $v(t)$ са реални полиноми, нулите на които се преплитат, тогава и нулите на $U(t) = au(t) + bv(t)$ и $V(t) = cu(t) - dv(t)$, където $a, b, c, d > 0$ също се преплитат.*

Дефиниция 10. *Нека $p(x)$ и $q(x)$ са два реални полинома чиито степени са еднакви или се различават с единица. Ще казваме, че реалните нули на тези полиноми* **слабо се преплитат** *ако няма два последователни интервала определени от три последователни нули на единия полином, които не съдържат една нула на другия полином и обратно.*

Лесно се вижда, че:

Твърдение 9. *Нека $q_1(x), q_2(x), g_1 x)$ и $g_2(x)$ са четири полинома и нулите на двойките $(q_1, q_2), (q_1, g_1)$ и (q_2, g_2) се преплитат, тогава нулите на двойката (g_1, g_2) слабо се преплитат.*

Бележка 1. Очевидно, в Твърдение 8, думите „се преплитат“ може да се заменят с думите „слабо се преплитат“.

Да разгледаме полиномите на t

$$g_1(t) = \mathcal{I}m\Big(p(te^{i\theta})\Big) = \sum_{k=1}^{n} a_k t^k \sin k\theta,$$

$$g_2(t) = \mathcal{R}e\Big(p(te^{i\theta})\Big) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \cos k\theta,$$

$$g_1'(t) = \sum_{k=0}^{n} ka_k t^{k-1} \sin k\theta, \;\; g_2'(t) = \sum_{k=0}^{n} ka_k t^{k-1} \cos k\theta,$$

$$h_1(t) = \mathcal{I}m\Big(p'(te^{i\theta})\Big) = \sum_{k=1}^{n} ka_k t^{k-1} \sin(k-1)\theta,$$

$$h_2(t) = \mathcal{R}e\Big(p'(te^{i\theta})\Big) = \sum_{k=1}^{n} ka_k t^{k-1} \cos(k-1)\theta.$$

Имаме

$$g_1'(t) = h_1(t)\cos\theta + h_2(t)\sin\theta, \quad g_2'(t) = h_2(t)\cos\theta - h_1(t)\sin\theta,$$

следователно

$$h_1(t) = g_1'(t)\cos\theta - g_2'(t)\sin\theta, \quad h_2(t) = g_1'(t)\sin\theta + g_2'(t)\cos\theta. \tag{7}$$

Доказателство на Теорема 6. Да допуснем противното, че съществува полином $p(z) \in P_n^+$ с $p'(\zeta_0) = 0$, където $\zeta_0 = re^{i\varphi}$ е нула на $p'(z)$ с най-малък положителен аргумент $\varphi \in (0, \pi/2)$, който не удовлетворява Теорема 6. Тогава съществува $\theta > \varphi$, такова, че $p(z) \in P_n^+(\theta + \varepsilon)$; $\varepsilon > 0$ и $p'(z)$ няма нули върху $L(\theta)$. Без загуба на общност, можем да предположим, че ζ_0 е единствената нула на $p'(z)$ с положителен аргумент по-малък от θ.

От Твърдение 7 следват равенствата

$$\Delta(p;\theta) = n\theta, \quad \Delta(p';\theta) = (n-1)\theta - 2\pi. \tag{8}$$

Броят на вариациите на коефициентите на $g_1(t)$ е равен на $[n\theta/\pi]$. Съгласно Декартовото правило за знаците, броят на положителните нули на $g_1(t)$ е равен или с четно число по-малък от броя на вариациите на коефициентите. Очевидно, че за да се измени стойността на $\arg(p(z))$ с π, стойността на $g_1(t)$ трябва да тръгне от една нула и да отиде до следваща нула на този полином. Следователно, от първото уравнение на (8) следва, че броят на положителните нули на $g_1(t)$ е точно равен на $[n\theta/\pi]$. Този факт се използва и в [1, p. 82].

Нека $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m$; $m = [n\theta/\pi]$ са нулите на $g_1(t)$. На всеки интервал $[t_{k-1}, t_k]$; $k = 1, 2, \ldots, m$ отговаря нарастване на $\arg(p(z))$ с π. Това е възможно, ако във всеки такъв интервал има нула на $g_2(t)$. Броят на вариациите на коефициентите на $g_2(z)$ е равен или с една повече от тези на $g_1(z)$, но $g_2(0) = a_0 > 0$, следователно броят на нулите на $g_2(z)$ е равен или с единица по-малък от този на $g_1(z)$. От всичко това следва, че неотрицателните нули на $g_1(t)$ и $g_2(t)$ се преплитат.

От класическата теорема на Рол и Декартовото правило за знаците следва, че неотрицателните нули на $g_1'(t)$ се преплитат с неотрицателните нули на $g_1(t)$ и неотрицателните нули на $g_2'(t)$ се преплитат с неотрицателните нули на $g_2(t)$.

От Твърдението (9) следва, че неотрицателните нули на $g_1'(t)$ и $g_2'(t)$ слабо се преплитат. Тогава, от (7) и Бележка 1 получаваме:

Твърдение 10. *Неотрицателните нули на $h_1(t)$ и $h_2(t)$ слабо се преплитат.*

Ние вече се убедихме, че ако нулите на $h_1(t)$ и $h_2(t)$ се преплитат, то $\Delta(p';\theta) = (n-1)\theta$, което противоречи на второто уравнение на (9). Тогава има интервал Δ' между две последователни нули на $h_1(t)$, в който няма нула на $h_2(t)$. Възможни са два случая:

1) Интервалът Δ' е последен и други такива интервали няма. В този случай,

нетното изменение на $\arg(p'(z)$, когато t преминава Δ' е 0 и $\Delta(p',\theta) = (n-1)\theta - \pi$, което противоречи на второто уравнение на (9).

2) След интервала Δ' е интервала Δ'', който съдържа нула на $h_2(t)$. Тогава нетното изменение на $\arg(p'(z))$, когато t преминава Δ'' е $-\pi$. Ние губим π за интервала Δ' и 2π за интервала Δ''. Следователно $\Delta(p',\theta) = (n-1)\theta - 3\pi$, което противоречи на второто уравнение на (9) и завършва доказателството.

Бележка 2. Горната теорема е публикувана (виж [4]) с доста дълго доказателство, което не е коректно.

5. Теореми на Рол за комплексни полиноми. От дефиницията на локус нолдер и Теорема 1, тривиално следва:

Твърдение 11. *От всеки локус холдер на полинома $\kappa_{n-1}(z)$ съответства теорема на Рол за комплексни полиноми от степен $n \geq 2$. На всеки локус на $\kappa_{n-1}(z)$ съответства точна теорема на Рол за комплексни полиноми от степен $n \geq 2$.*

Ние вече видяхме, че теоремата на Грейс е инструмент за намиране на локус холдер на даден полином, който е диск или полуравнина. Ще представим метод за намиране на локус холдер, който е обединение на два диска или две полуравнини.

От Теорема 5 и Теорема 6 следва:

Теорема 7. *Ако $p(z) \in P_n^+(\phi)$, тогава секторът $S(\phi)$, който е обединение на две полу равнини, е локус холдер на $p(z)$.*

Доказателство. Съгласно Теорема 6, секторът $\mathcal{C} \setminus S(\phi)$ е свободен от нули за полинома ро$p(z)$. Ако $S(\phi)$ не е локус холдер на $p(z)$, тогава, съгласно Теорема 5 съществува решение на $p(z)$, на което всички точки са върху положителната реална ос. Това е невъзможно, защото не всички коефициенти на $p(z)$ са равни на 0. С това доказателството е завършено.

Теорема 8. *Двойният диск*

$$R_n^S S = DD[c;r] = D[-c;r] \bigcup D[c;r],$$

където

$$c = \cot\frac{2\pi}{n}, \quad r = \sin^{-1}\frac{2\pi}{n}; \quad n \geq 3,$$

е множество на Рол.

Доказателство. Ако за полинома $q(z) \in \mathcal{P}_n$ съществува Мьобиосова оператор $T[q](z)$, виж (5), такъв, че $p(z) = T[q](z) \in P_n^+$, тогава ние знаем локус холдер на Ω на $p(z)$, който е обединение на две полу равнини. Съгласно Теорема 4, $T^{-1}(\Omega)$ е двоен диск, който е локус холдер на $q(z)$.

За трансформацията

$$\tau(z) = i\frac{z+1}{z-1} \quad \text{with} \quad \tau^{-1}(z) = \frac{z+i}{z-i}.$$

имаме

$$\begin{aligned}\tau[\kappa_n](z) &= -\frac{i}{2(n+1)}(z-1)^n\left(\left(i\frac{z+1}{z-1}+i\right)^{n+1} - \left(i\frac{z+1}{z-1}-i\right)^{n+1}\right)\\ &= \frac{i^n}{2(n+1)}q_n(z),\end{aligned}$$

където

$$q_n(z) = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} = z^n + z^{n-1} + \cdots + 1. \tag{9}$$

Очевидно $q_n(z) \in P_n^+(2\pi/(n+1))$. Съгласно Теорема 7, секторът $S(2\pi/(n+1))$ е локус холдер на $q_n(z)$. От Теорема 4 следва, че $\tau\Big(S(2\pi/n)\Big)$ е локус холдер на $\kappa_{n-1}(z)$.

Лесно се вижда, че

$$\tau(e^{2\pi i/n}) = \cot\frac{\pi}{n},\ \ \tau(e^{-2\pi i/n}) = -\cot\frac{\pi}{n},\ \ \tau(0) = -i,\ \ \tau(\infty) = i,$$

следователно $\tau(z)$ изобразява сектора $S(2\pi/n)$ в двойния диск $DD[c;r] = D[-c;r] \bigcap D[c;r]$, където кръгът $C(c;r)$ минава през точките i, $-i$, $\cot(2\pi/n)$. От последното пресмятаме, че

$$c = \cot\frac{2\pi}{n}, \quad r = \sin^{-1}\frac{2\pi}{n}.$$

С това доказателството на Теорема 8 е завършено.

Доказаната Теорема 8 е по-силна от теоремата на Грейс-Нейвуд. Тя е по-силна и от класическата теорема, виж [2, стр. 128]

Теорема 9. *Двойният диск*

$$R_n^F = DD[c;r] = D[-c;r] \bigcup D[c;r],$$

където

$$c = \cot\frac{\pi}{n-1}, \quad r = \sin^{-1}\frac{\pi}{n-1}; \quad n \geq 3,$$

е множество на Рол.

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. W.Barnard, W. Dayansa, K. Pearce, D. Weinberg. Polynomials with nonnegative coefficients, *Proc. AMS*, **113**, No 1 (1991), 77–85.

[2] Q. I. Rahman, G. Schmeisser. Analytic Theory of Polynomials, Oxford Univ. Press Inc., New York, 2002.

[3] Bl. Sendov, H. Sendov Loci of complex polynomials, part I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **366**, No 10, (2014) 5155–5184.

[4] Bl. Sendov. Analogue of Gauss-Lucas Theorem for non convex set on the complex plane. *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **67**, No 5 (2014), 207–212.

Благовест Сендов
Българска Академия на Науките
Ул. Плачковица № 5
София, България
e-mail: sendov2003@yahoo.com

Христо Сендов
Department of Statistics
and Actuarial Sciences
Western University
1151 Richmond Str., London
ON, N6A 5B7 Canada
e-mail: hssendov@stats.uwo.ca

APOLARITY

Blagovest Sendov, Hristo Sendov

The lecture is based on the joint paper [3]. A generalization of apolarity is used for definition of the notion *locus of a complex polynomial*. As an implementation of the loci theory, the following Rolle's theorem for complex polynomials is proved:

Let Ω *be the union of the two disks* $D[-c; r]$ *and* $D[c; r]$ *with centers* $-c$ *and* c *and radius* r*, where*

$$c = \cot \frac{2\pi}{n}, \quad r = \sin^{-1} \frac{2\pi}{n}; \quad n \geq 3.$$

If $p(z)$ *is a complex polynomial of degree* $n \geq 3$*, with* $p(-i) = p(i)$*, then there is at least one* $\zeta \in \Omega$*, such that the derivative* $p'(\zeta) = 0$*.*

This theorem is stronger than any other known Rolle's theorem for complex polynomials.