МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2015
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2015
Proceedings of the Forty Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
SOK "Kamchia", April 2–6, 2015

ОБУЧЕНИЕ ПО МАТЕМАТИКА СЪС СИСТЕМА ЗА СИМВОЛНО СМЯТАНЕ*

Марин Л. Маринов

В доклада се представя опитът на НБУ в преподаване на математика с използване на система за символно смятане. Представеният подход е определен със следните три основни характеристики:

1) Използване на научния софтуер като средство за преподаване и комуникация.

2) Методика за преподаване на математика, която поставя обучаемия в центъра на процеса на обучение. Тя включва нова форма на обучение – лабораторни занятия и промяна на ролята на лекциите и упражненията.

3) Пълно използване на възможностите, предоставяни от технологиите за електронно обучение във всички форми на обучение.

Примерите в доклада са със системата Mathematica и платформата MOODLE, но могат да се използват и други развити системи за символно смятане и други платформи за електронно обучение.

I. Въведение. Последните петнадесет години поставиха сериозни предизвикателства пред висшето образование в България. Те са следствие на глобални процеси. И докато относно общата характеристика на тези глобални процеси и стратегията за действие има единомислие, то конкретната реализация и конкретните резултати са незадоволителни. Съвременните предизвикателства пред образованието по математика са обект на дискусии и научни доклади във всички конференции на СМБ през последните години. Всички те дават своя принос в решаването на комплекса от въпроси, свързани с развитието на образованието по математика. Ще посочим три от предизвикателствата, които имат отношение към темата на доклада.

Първото касае новата роля на математиката като част от човешката култура и фактор за интелектуално развитие на човека. И преди математиката е присъствала в университетското образование, но е била адресирана към малка част от обществото. Днес логическо и алгоритмично мислене и неговото приложение извън математиката и информатиката са въпрос на съвместимост със съвременния свят. Настъпването на съвременните информационни технологии и дигиталната култура водят до необходимост от масовизиране на обучението по математика.

Второто предизвикателство се свежда до новата роля на *научния софтуер и технологиите за електронно обучение.* Бе създаден софтуер, който ефективно решава основни проблеми от различни професионални области. Възможността за работа с такъв софтуер в редица случаи се превърна в необходимо условие за успешната реализация на съответния специалист. Това доведе до необходимостта отделни

*Докладът се реализира с финансовата подкрепа на ФНИ по договор ДФНИ – И02/12.

представители на *научния софтуер* да се включат в университетските програми. В областта на математиката това са например системите *Maple, Matlab, Mathematica.* Освен това ние сме свидетели на бурно развитие и на *технологиите за електронно обучение.* Техническите и прагматичните предимства на тези технологии, тяхната отвореност и голям потенциал за повишаване на качеството на обучение, са част от причините, довели до навлизането им във всички форми на обучение.

Третото предизвикателство се отнася до силното намаляване на хорариума, отделян за изучаване на математика в специалностите по информатика в университетите. Началото на този процес се постави с въвеждането на бакалавърската и магистърската степен в университетите. В много случаи това се реализира формално, като пропорционално се намали хорариумът на изучаваните дисциплини, без да се отчита основната цел на бакалавърската степен и ролята, която трябва да имат базисните дисциплини в бакалавърското обучение.

В доклада се представя една възможност да се даде едновременно отговор на тези предизвикателства, като в центъра на процеса на обучение се постави обучаемият, а основната цел е *подготовката на компетентни студенти, способни да прилагат наученото при решаване на нестандартни задачи.* Отговорът се дава от *практически ориентираното обучение по математика,* което включва следните основни характеристики:

1) Превръщане на научния софтуер в средство за преподаване и комуникация. (Примерите в доклада са с използване на системата „*Mathematica*", но може да се използва и друга развита система за символно смятане.)
2) Изграждане на методика за преподаване на математика, която поставя обучаемия в центъра на процеса на обучение. (Методиката включва нова форма на обучение – лабораторни занятия и промяна на ролята на лекциите и упражненията.)
3) Пълно използване на възможностите, предоставяни от технологиите за електронно обучение. (В доклада се има предвид платформата MOODLE и възможности като дискусионен форум, чат, анкета, тест, задание, уики (wiki) и виртуална класна стая.)

Основното твърдение е, че така определеното *практически ориентирано обучение по математика* не само отговаря на горните предизвикателства, но *дава възможност за подобряване* на качеството на обучение. Предложеното решение се базира на опита от обучението по математика в професионално направление *4.6. Информатика и компютърни науки* в НБУ.

II. Силни и слаби страни на класическото обучение по математика. В последните шестдесет години се утвърди един подход за преподаване на математика, който тук ще наричаме ***академичен***. При него знанието е разделено на непресичащи се дисциплини (линейна алгебра, аналитична геометрия, математически анализ, вероятности, статистика, комплексен анализ, обикновени диференциални уравнения, частни диференциални уравнения, изследване на операциите, числени методи). Обучението във всяка дисциплина е ***дедуктивно***. В центъра е поставен преподавателят. Обикновено обучението има два етапа. То започва с постулиране на абстрактно знание от преподавателя, а първата задача на студента е да заучи истините и рецептите за поведение. Тази методика се разгръща във втория етап, за което е нужен достатъчен брой часове за лекции и упражнения. Този втори етап дава възможност на студентите, изминали пътя на сложните доказателства и найярките примери по време на лекция, да натрупат и собствен опит чрез задачи от различни нива на сложност по време на упражнения. Това прави възможно, връщайки се към цялостно осмисляне на наученото, да се изгради единен комплекс от логически обвързани лекции и упражнения. За всяка една от изброените по-горе дисциплини има отпечатани добри учебници и сборници, представящи тази методика. (Например по линейна алгебра такъв учебник е [1], а съответния сборник е [2].) Студентите, успешно преминали такова обучение, имат добра теоретична и практическа подготовка, развиват своето логическо и алгоритмично мислене. Придобиват опит при решаване на нестандартни задачи. Развиват своите евристични способности. Добре определената последователност, в която се изучават отделните математически дисциплини, дава възможност да се постигне ефекта на надстрояване и изграждане на единна математическа основа. Досегашната практика показва, че студентите, получили такава основа, успешно се изграждат като специалисти по приложна математика, информатика, физика, технически науки, икономика и т.н.

Могат да се посочат следните *слабости* на тази методика на обучение:

1) Необходим е голям хорариум за нейното реализиране.
2) Успешната реализация предполага специални способности от студентите.
3) Обучението в отделните дисциплини е насочено преди всичко към самото себе си (затвореност).
4) Използват се стари средства за обучение.

Говорейки за силните страни на обучението по математика от последните шестдесет години, трябва да се отчете и положителния опит, основан на ***дедуктивния метод*** на обучение. Една добра реализация на този метод е представена в книгата на И. М. Глазман и Ю. И. Любич [3]. Още в предговора авторите заявяват, че обучението по математика е като обучението в изкуство. (Например обучение в школа по цигулка.) Преподавателят напътства обучаемия в развиването на необходимата техника, последователността на упражненията и тяхното разучаване. По същество, студентът се обучава в нещо, като го открива (реализира, изпълнява) сам. Студентите изучават крайномерен анализ, като сами изграждат знанието, решавайки последователно специално подбрани задачи.

Безспорни са положителните страни на тази методика, която можем да наречем *изследователска*:

1) Получените знания са трайни.
2) Развива се умението за изследване на нестандартни задачи.
3) Обучаемият е в центъра на процеса на обучение, като обучението се води по най-оптималния за него път.

Нейната *ограниченост* е в това, че не може да се опише абстрактно. Реализирането на тази методика става чрез съвместно творчество на преподавателя и обучаемите, което го прави *уникално.* То налага и специфичен профил на преподавателя. Освен това обучението по същество е индивидуално и предполага голям преподавателски ресурс. Навярно тези обстоятелства са и причината за доминиращото присъствие на академичното обучение в университетите.

III. Заплахи пред реформата в образованието по математика. Една от заплахите в случая е в естественият стремеж да се запазят силните страни на академичния начин на обучение, като се реализира същата методика на обучение (формите и средствата остават същите). Обаче в много случаи хорариумът, който може да се отдели по математическите дисциплини, е драстично по-малък от този, необходим за академичното обучение. Това води до отпадане на цели математически дисциплини (комплексен анализ, диференциални уравнения, числени методи). В резултат се разрушава логическата обвързаност на обучението. При дисциплините, които остават, настъпват силни промени. Отпадат отделни части от изучаваната дисциплина, а останалите, по същество, запазват нивото на своята сложност. От лекциите отпадат повечето доказателства; хорариумът на упражненията е недостатъчен, за да се решат задачи от всички нива и да се изгради връзка с лекциите. Резултатът е, че студентите остават в първия етап на академичното обучение, не разбират това, което се представя на лекции и упражнения, и по същество са отстранени от обучението. От друга страна, съкращаването на отделни части от дисциплината разрушава вътрешната логика и мотивацията на лекциите и упражненията и те стават самоцелни, а понякога и несъдържателни даже сами по себе си.

В този случай научният софтуер се представя като отделна дисциплина и по същество се свежда до прочит на упътването към системата с нови примери, а платформите за електронно обучение се ползват като начин за разпространение на текст.

Как да се преподава математика? От казаното по-горе се вижда, че както дедуктивният, така и индуктивният метод имат място във висшето образование. При класическия начин на преподаване, дедуктивният метод е по-лесен за студентите от първи курс, а индуктивният подход успешно се прилага при студентите от четвърти курс. Системите за електронно обучение в случая се ползват за предоставяне на електронни материали, за оценяване и отчасти за комуникация. Предложеният в статията отговор на поставения въпрос се намира между *академичното* обучение и *изследователското* обучение и съчетава индуктивния и дедуктивния метод на преподаване. Този начин на обучение определяме като ***практически ориентирано обучение***. В следващите три параграфа ще представим три от основните му характеристики.

IV. Научният софтуер – средство за обучение и комуникация. Системата Mathematica *предоставя мощни дидактически възможности за реализиране на качествено обучение по математика.* Те са забелязани още с нейните начални версии. Към текущия момент има множество книги, илюстриращи тези възможности. За да се убедим в това е достатъчно е да разгледаме информацията, предлаганата на сайтовете [4] и [5]. Ще посочим някои от причините за добрите дидактически възможности.

1) *Удобният интерфейс* на системата дава възможност да не се губи много време за обяснение на синтаксиса на отделните вградени функции и да се съсредоточим върху математическия проблем. Много често към съответната вградена функция се обръщаме така, както се записва изчислението в класическите учебници по математика. Например, ако трябва да изчислим дължината на графиката на функцията $y = a\dfrac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$, $x \in [0;\ a]$, $a > 0$, то решението със

системата Mathematica изглежда така:

(а) Въвеждаме функцията –

$$\text{In[1]:= } f[x\_] = a\,\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

$$\text{Out[1]= } \frac{1}{2}\,a\left(e^{-\frac{x}{a}} + e^{\frac{x}{a}}\right)$$

(б) Извикването на функциите, които изчисляват определен интеграл, корен квадратен, производна и степен може да стане от екрана, избирайки съответния математически символ. Така в командния ред ние просто изписваме формулата от известната теорема. Получаваме

$$\text{In[2]:= } \int_0^a \sqrt{1 + (f'[x])^2}\, dx$$

$$\text{Out[2]= } a\,\mathrm{Sinh}[1]$$

Следователно дължината на графиката е $a\dfrac{e - e^{-1}}{2}$.

2) *Добра възможност за визуализация*, в т.ч. двумерни и тримерни графики, анимации и др. Това открива богати възможности както за онагледяване на понятия и доказателства, така и за собствени експерименти, развиващи евристиката на студентите.

3) *Добри възможности за символни изчисления във всички математически дисциплини.* В частност, почти всички задачи от една академична дисциплина могат да се решат със системата Mathematica или системата може да се използва съществено при решението на задачата. Виж например [4] и [5], а също така [6–10].

4) *Системата Mathematica дава възможност да се преподават доказателства.* Изучаването на доказателства е важен етап в обучението по математика. Чрез доказателствата се изграждат връзки между изучаваните понятия. Така фактите се превръщат от елементи на едно множество в жива структура, способна да анализира и решава нови задачи. Системата Mathematica не е специализирана система за доказателства, но фактът, че с нейна помощ са лесно преодолими редица изчисления на символно ниво, помага на студентите да се съсредоточат върху същността на метода на доказване, областите на неговата приложимост и интерпретацията на резултатите. В статията [11] показахме как всички основни видове доказателства могат да се преподават с компютър. Ще направим уговорката, че в случая не става дума за математическия обект – доказателство, който се изследва в математическата логика и е последователност от символи. Става дума за така наречените *съдържателни математически доказателства,* които се изучават в курсовете по математика. Например метод на: непосредствена проверка; допускане на противното; контрапример; математическа индукция; косвено доказателство и т.н., както и възможностите за тяхното съдържателно свързване и комбиниране. Ще отбе-

лежим, че компютърната реализация на някои от методите разширява обсега на тяхната ефективност. Нещо повече, студентите се запознават и с компютърното доказателство като метод за научно изследване.

5) *Mathematica е отворена система, в която са интегрирани знанията на много математически области.* Тя дава възможност лесно да се определят нови функции, които обединяват знание както от различни части на изучаваната дисциплина, така и от различни математически дисциплини.

Освен добрите дидактически възможности, системата *Mathematica* предоставя среда, в която са лесно достижими основните математически твърдения, среда, в която повечето трудни математически преобразувания се правят за части от секундата и безпогрешно. За съвременните студенти това е естествено и по-малко стресиращо от класическата лекция. Това обаче променя очакването от занятията в университета.

V. Форми на обучение. *Практически ориентираното обучение по математика* поставя студента в центъра на процеса на обучение. По същество, студентът се обучава в нещо, като го открива (решава; доказва) сам. Обучението е резултат от неговото участие в ръководена от преподавател обучителна общност, която изследва (решава) даден проблем. Преподавателят подпомага студентите при формулирането на естествените етапи на решението, като малки лесни подзадачи. Разкрива мотивировката на предлаганите от студентите етапи. Едновременно с това се подбират (определят) и удобните функции за решаването на подзадачите.

Реализирането на практически ориентираното обучение по математика се осъществява чрез три форми на обучение: *лекции, упражнения и лабораторни занятия*, които се разгръщат в единна система. Нашата практиката показва, че при една шестдесетчасова дисциплина часовете могат да се разпределят така: 18 часа лекции; 12 часа упражнения и 30 часа лабораторни занятия. Това разпределение на хорариума 30% за лекции, 20% за упражнения и 50% за лабораторни занятия се оказва добро и при тридесет часовите курсове в първите две години. В случая половината от хорариума е отделен за новата форма на обучение – *лабораторно упражнение.* Освен това другите две форми (лекция и упражнение) имат нови цели и методи за тяхното постигане.

Лекциите и упражненията подготвят студентите за лабораторните занятия и имат специфични цели.

Лекциите запознават студентите с повечето основни понятия и най-важните теореми. Използването на система за символно смятане като средство за преподаване дава възможност за малко време да се постигне пълно разгръщане на класическата методика за въвеждане на понятия и изучаване на теореми. Понятията се въвеждат с помощта на примери, които се решават от студентите и/или се илюстрират с подходящи графики. В зависимост от понятието, примерите могат да го предхождат или да го илюстрират след неговото въвеждане. Например при въвеждането на понятието *ранг на матрица*, предварително в лабораторно занятие студентите сами откриват феномена, че рангът на множеството от редовете на произволна матрица винаги е равен на ранга на множеството от нейните стълбове. Това става чрез примери на матрици, които студентите сами съставят. Системата Mathematica дава възможност за малко време да се разгледат няколко матрици от следния вид:

```
In[1]:= A = ( 1   2   3   1   2   3
              1   0   1   0   1   0
              1   1  -1  -1   1   1
             -3   2   5   4  -1   4
              5  -1   1  -2   4  -2
              3   3  -9  -6   2   2 );
```

Първият ред на матрицата A

```
In[2]:= A[[1]]

Out[2]= {1, 2, 3, 1, 2, 3}
```

очевидно не е нулев и заедно с втори и трети ред образуват линейно независима система, защото

```
In[3]:= Solve[x*A[[1]] == A[[2]], {x}]

Out[3]= {}

In[4]:= Solve[x*A[[1]] + y*A[[2]] == A[[3]], {x, y}]

Out[4]= {}
```

Лесно се установява, че останалите редове са линейна комбинация на първите три реда.

```
In[5]:= Solve[x*A[[1]] + y*A[[2]] + z*A[[3]] = A[[4]], {x, y, z}]

Out[5]= {{x → 2, y → -3, z → -2}}

In[6]:= Solve[x*A[[1]] + y*A[[2]] + z*A[[3]] = A[[5]], {x, y, z}]

Out[6]= {{x → -1, y → 5, z → 1}}

In[7]:= Solve[x*A[[1]] + y*A[[2]] + z*A[[3]] = A[[6]], {x, y, z}]

Out[7]= {{x → -1, y → -1, z → 5}}
```

Следователно рангът на множеството от редовете на матрицата A е три.

Напълно аналогично се проверява, че системата от втори, трети и шести стълб е базис в множеството от стълбовете на матрицата A и следователно рангът на множеството от стълбовете на A е три.

Ще отбележим, че демонстрираният метод за намиране на базис в крайно множество от вектори следва съответните доказани твърдения по време на лекция. Друга важна специфика е, че включването на системата Mathematica в средствата за преподаване превръща една сложна и времеемка задача в задача, която е лесна и може да се използва като мотивация. Например въвеждането на понятието локален екстремум на функция на много променливи може да започне, като студентите, разделени на няколко групи, скицират графиките на функции от вида $z = (4x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$. Те могат да разгледат графиката от различен ъгъл и разбират основните изисквания на определението. Използването на системата

Mathematica в преподаването на *Математически анализ на много променливи* показва, че значително се разширява кръгът на понятията, които имат лесно достижима геометрична интерпретация (виж [13]).

В доказателствата на основните теореми, освен че се придържаме към описаната по-горе методика на практически ориентираното обучение, се използват и новите възможности, предоставяни от системата Mathematica. Това дава възможност да се представят по-ясно решаващите моменти в сложните доказателства. Например при теоремата за ранга на матрица (виж [12], стр. 58), за да се обясни защо всеки ред (стълб) на матрицата е линейна комбинация на редовете (съответно на стълбовете) на матрицата, които минават през базисния минор, може да се използва конкретна матрица, като въведената по-горе матрица A. Освен това използването на система за символно смятане разширява възможността за разглеждане на повече примери, показващи значимостта на всяко изискване в условието на теоремата.

Упражнението като отделна форма заема най-малък относителен дял от хорариума на дисциплината (20%). Основните цели са: запознаване със системата Mathematica и синтаксиса на използваните функции; придобиване на умение за използване на готови конструкции или готови функции при решаването на задачи; представяне на значимостта на отделни условия в изучаваната теорема; представяне на смисъла от различните резултати след прилагането на изучаваните функции; придобиване на умение да се представят собствените решения. Тези цели се постигат, като студентите самостоятелно решават задачи от първо ниво, а преподавателят анализира решенията на студентите. Ще подчертаем, че включването на системата за символно смятане като средство на обучение води до промяна на утвърдената подредба на задачите по сложност. Причината е голямото количество функции за символно смятане. Това превръща основната част от известните задачи в едностъпкови. Такива задачи например са:

- да се скицира графиката на функция, която може да е зададена явно, параметрично или неявно
- да се намери максимума (минимума) на функция върху компакт
- да се пресметне производната
- да се пресметне интеграла
- да се намери обратната или псевдообратната матрица

и т.н.

Лабораторните упражнения като отделна форма заемат най-голям относителен дял от хорариума на дисциплината (50%). Основната цел е изграждане на умения за:

- работа в екип
- използване на знанията от различни части на изучаваната дисциплина или от различни дисциплини при решаването на дадена задача
- бързо възстановяване на забравен материал
- проверка на получените резултати.

Задачите, разглеждани по време на лабораторните занятия, условно ще разделим на три групи според вида на *новото знание*, което студентите придобиват.

Първата група включва задачи, които илюстрират универсалността на изучаваната теорема или изучаваната вградена функция на системата за символно смятане. Студентите научават допълнителни ситуации, в които могат да се приложат изучаваните теореми и функции на системата за символно смятане, а също така и примери, при които те не могат да се прилагат. Ето един типичен пример за такава задача.

Да се определи ранга на матрицата $A[x]$ в зависимост от параметъра x, ако

In[1]:= $$\mathbf{A[x\_]} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 5 & 4 & x & 4 \\ 5 & -1 & 1 & x & 4 & -2 \\ 3 & 3 & -9 & -6 & 2 & -x \end{pmatrix};$$

Непосредственото прилагане на вградената функция за изчисляване на ранга на матрицата $A[x]$ дава следния резултат

```
In[2]:= MatrixRank[A[x]]

Out[2]= 6
```

Това може да доведе до погрешен извод, че рангът е 6 за всяко x. В действителност рангът на $A[x]$ при $x = -2$ е равен на

```
In[3]:= MatrixRank[A[-2]]

Out[3]= 4
```

и при $x = -1$ е равен на

```
In[4]:= MatrixRank[A[-1]]

Out[4]= 5
```

Когато приложението на изучаваната теорема изисква прилагане на няколко вградени функции, студентите много бързо стигат до извода, че е много по естествено да си определят своя собствена функция, която да дава резултата от приложението на теоремата при въвеждане на условията на теоремата. Като типични примери могат да се посочат теоремите, доказвани при изучаване на линиите и повърхнините от втора степен.

Втората група от задачи имат за цел да разширят знанията на студентите за математическите доказателства и математическите понятия. При работата върху задачи от този тип акцентът пада върху самото доказателство. Целта е да се изгради активно знание за това какво е доказателство по метода на: математическата индукция; пълното изчерпване; от противното и т.н. Типични примери за тези доказателства, реализирани със системата Mathematica, сме привели в [11]. Разнообразието на задачите, които могат да се използват за очертаване на обхвата на изучавано математическо понятие, е голямо. Тези задачи са добре представени в класическите учебници и сборници. С тях може да се подготви въвеждането на дадено понятие, както и ярко да се представят определящи характеристики на понятието.

Третата група съдържа сложни задачи и твърдения, които или водят до доказателството на теорема, или самите те са основни твърдения или теореми. Към тази група от задачи се включват и такива, чието решаване изисква включването на знание от други дисциплини или други части на изучаваната дисциплина. По такъв начин се допълват знанията, преподавани на лекции. Върху една и съща задача работят поне трима студенти. Студентите могат да работят самостоятелно или заедно в група. Ролята на преподавателя е да ги подпомага при:

- формулирането на естествените етапи на решението, като малки по-лесни подзадачи
- разкриването на мотивировката за формулиране на етапите
- избора или определянето на удобни функции на системата Mathematica за решаване на формулираните подзадачи.

Пътят, по който се развива работата във всяка група, е винаги специфичен и зависи от подготовката на преподавателя и подготовката на конкретните студенти. Изследването на проблема може да минава през:

- поредица от експерименти или разглеждане на частни случаи
- формулиране на хипотеза и подбиране на контрапримери към нея
- инвентаризация на изучени теореми и функции, които като извод биха дали исканото доказателство, ако са приложими

и т.н.

При решаването на някои задачи е подходящо отделните групи от студенти да представят на всички от курса междинните резултати и проблеми, с които са се сблъскали и чието решение търсят в момента. Това става лесно с възможностите на електронното обучение и не отклонява студентите от процеса на решаването.

Обучението по време на лабораторно занятие е най-близко до описания по-горе метод на изследователското обучение.

VI. Използване на възможностите, предоставяни от технологиите за електронно обучение. При така структурираното обучение по математика, компютърът се очертава като *основно учебно средство.* Той е основният източник на информация. По време на учебния процес студентите работят с него и се създават еднотипни файлове. Процесът на обучение е съвместим с възможностите, които поддържат платформите за електронно обучение. Опитът в НБУ показва, че използването на MOODLE позволява по-пълно да се разгърне обучението, да се повиши значително ефективността на учебния процес. Модулът за *дейност Урок* дава възможност на преподавателя да представя учебно съдържание и/или практически дейности по интересен и гъвкав начин. Модулът за *дейност Задание* изгражда постоянна връзка между преподавателя и студентите при поставянето, оценяването и поправката на самостоятелните работи на студентите. Ще подчертаем, че самостоятелната работа на студентите върху домашни, курсови работи, проекти и т.н. е основен компонент при упражненията и лабораторните занятия. *Модулите Дискусионен форум, Чат, Уики (wiki) и Работилница* подпомагат студентите, засилват тяхната отговорност към учебния процес, улесняват работата им в група. Огромни са очакванията от такива модули като *виртуална класна стая* и *виртуална лаборатория.*

VII. Заключение. Описаната по-горе методика на обучение по математика се прилага в НБУ при обучението по линейна алгебра и математически анализ. Резултатите показват, че студентите, които участват в учебния процес, постигат формулираните цели на обучението. Придобитите от тях знания и умения изграждат една добра математическа основа. Студентите усвояват и умения за придобиване на нови знания. Те могат сами да ползват огромната база от информация на системата Mathematica. По косвен начин се запознават в дълбочина с една система за символно смятане, която се използва професионално при решаване на задачи от практиката. Освен това провежданите анкети за удовлетвореността на студентите показват, че студентите оценяват високо преподаването на математика с компютър.

Наред с тези безспорно положителни страни трябва да се отбележи, че този начин на преподаване има и слабости, очертава и редица нерешени проблеми.

1) Новата методика на обучение е значително по-скъпа от класическия начин на преподаване. (Занятията трябва да се провеждат в компютърна зала. Системите за символно смятане изискват допълнително финансиране. Един преподавател обучава по-малък брой студенти.)
2) Отсъстват утвърдени образци на учебни пособия. Отсъстват добре разработени системи от задачи за лабораторните занятия.
3) Необходимо е обучението да се води с актуална версия на системата за символно смятане, което засилва проблема с учебните пособия.
4) Променя се професионалния профил на преподавателя.
5) Възниква въпросът дали е необходима единна система за символно смятане, която да се използва във всички университети?

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Линейная алгебра. Наука, Москва, 1999.

[2] И. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре. Издательство: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.

[3] И. Глазман, Ю. Любич. Конечномерный линейный анализ. Наука, Москва, 1969.

[4] `www.wolfram.com`

[5] `www.exponenta.ru`

[6] I. Shingareva, C. Lizarraga-Celaya. Maple and Mathematica. A Problem Solving Approach for Matematics, Springer, 2007.

[7] J. Gary. Mastering Mathematica. Academic Press, 1998.

[8] М. Маринов, П. Петров. Системата Mathematica като средство за обучение по диференциални упражнения. Годишник на БСУ, 2003, 111–118.

[9] М. Маринов, П. Петров, Е. Николова. Пакета Mathematica като средство за преподаване и решаване на задачи по вероятности и статистика. Научна конференция "Съвременни технологии – 03", БСУ, Бургас 2002, 26–31.

[10] M. Marinov. Пресмятане на функция от матрица с Mathematica. *Математика и математическо образование*, **37**, (2008), 374–380.

[11] M. Marinov, P. Asenova. Mathematical Proofs at University Level. Computer Science and Education in Computer Science, Fulda, Germany, 2013, 72–81, ISSN1313-624.
[12] М. Маринов. Матрично смятане с Mathematica. "Planeta 3", София, 2008, ISNB 978-954-535-496-0.
[13] М. Маринов. Лекции по висша математика със средствата на компютърната алгебра. MOODLE НБУ, 2009.

Марин Ласков Маринов
Департамент по Информатика
Нов Български Университет
ул. Монтевидео 21
1618 София, България
e-mail: mlmarinov@nbu.bg

MATHEMATICAL EDUCATION WITH SYSTEM FOR SYMBOLIC CALCULATION

Marin Laskov Marinov

This paper presents the experience of NBU in teaching mathematical disciplines using a software for symbolic calculations. The given approach is defined by the following three basic characteristics:

1) The usage of scientific software as an instrument for teaching and communication.

2) A method for teaching mathematical disciplines that places the student at the center of the process. The method includes a new form of education – laboratory classes and change of the role of the lectures and workshops.

3) Full usage of the capabilities given by the technologies for electronic education. The examples given in the paper are based on the system *Mathematica* and the platform *MOODLE*, but other developed systems for symbolic calculations and other platforms for electronic education can be adopted as well.