

КОНИЧНИ СЕЧЕНИЯ С КОЛИНЕАРНИ ЦЕНТРОВЕ

Сава Гроздев, Веселин Ненков

Във връзка с обобщението на една от задачите от Международната олимпиада по математика през 2014 г. са получени две забележителни конични сечения на триъгълника, които се определят от произволно негово описано конично сечение.

1. Увод. Съществуват геометрични задачи, чието обобщение води до откриване на забележителни свойства на триъгълника. Тези свойства придават по-дълбок смисъл на самото обобщение. Подобна е ситуацията и с едно обобщение на следващата задача от темата на Международната олимпиада по математика през 2014 г. в Кейптаун: *Върху страната BC на остроъгълния триъгълник ABC са избрани точки P и Q така, че $\sphericalangle PAB = \sphericalangle BCA$ и $\sphericalangle CAQ = \sphericalangle ABC$. Точките M и N съответно върху правите AP и AQ са такива, че P е среда на AM и Q е среда на AN . Да се докаже, че правите BM и CN се пресичат върху описаната около триъгълника ABC окръжност.*

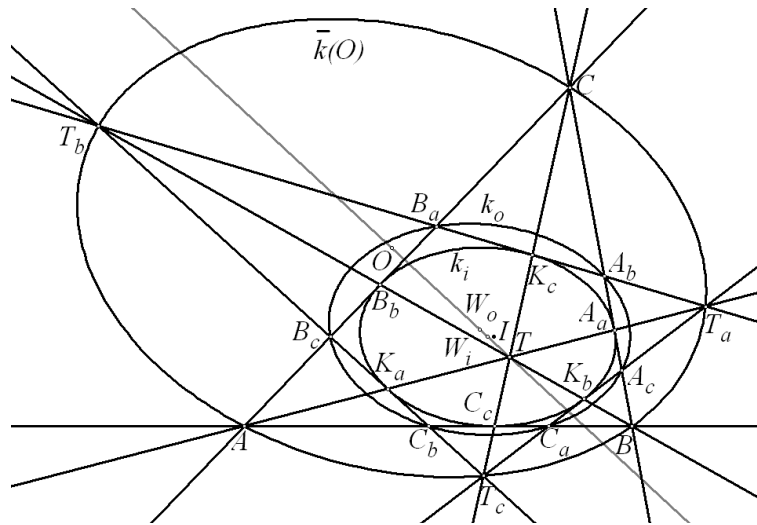
Обобщение на тази задача, описано в [1], се представя с твърдението на следната:

Теорема 1. *Нека $\bar{k}(O)$ е конично сечение с център O , описано за $\triangle ABC$, а t_b и t_c са допирателните на $\bar{k}(O)$ съответно в точките B и C . Точките P и Q от правата BC са такива, че $AP \parallel t_b$ и $AQ \parallel t_c$. Ако точките M и N са симетричните образи на A съответно спрямо P и Q , то правите BM и CN се пресичат в точка T_a от $\bar{k}(O)$.*

Теорема 1 определя конструкция, чрез която на върха A на дадения триъгълник ABC , се съпоставя точка T_a . С аналогични конструкции на върховете B и C могат да се съпоставят съответно точките T_b и T_c . Специалният начин на построяване на T_a , T_b и T_c ги поставя в положение на забележителни точки за $\triangle ABC$ върху описаната му крива $\bar{k}(O)$. Във връзка с тези забележителни точки ще отбележим две интересни конични сечения и едно свойство на техните центрове.

2. Две забележителни конични сечения. За пресечните точки, определени от правите BC , CA , AB , T_bT_c , T_cT_a , T_aT_b , AT_a , BT_b , CT_c , въвеждаме следните означения: $T_bT_c \cap CA = B_c$, $T_bT_a \cap CA = B_a$, $T_cT_a \cap AB = C_a$, $T_cT_b \cap AB = C_b$, $T_aT_b \cap BC = A_b$, $T_aT_c \cap BC = A_c$, $AT_a \cap BC = A_a$, $BT_b \cap CA = B_b$, $CT_c \cap AB = C_c$, $AT_a \cap T_bT_c = K_a$, $BT_b \cap T_cT_a = K_b$, $CT_c \cap T_aT_b = K_c$ (Фиг. 1). Наблюденията с програмата "THE GEOMETER'S SKETCHPAD" (GSP) ни дават основание да очакваме, че са в сила следните теореми:

Теорема 2. *Точките A_b , A_c , B_c , B_a , C_a , C_b лежат на едно конично сечение k_o . (Фиг. 1)*



Фиг. 1

Теорема 3. Точките A_a, B_b, C_c, K_a, K_b и K_c лежат на конично сечение k_i , вписано в $\triangle ABC$. (Фиг. 1)

Теорема 4. Правите AT_a, BT_b и CT_c минават през една точка T . (Фиг. 1)

Ако допуснем, че теорема 4 е вярна, то от теоремата на Дезарг следва, че пресечните точки на двойките срещуположни страни на триъгълниците ABC и $T_aT_bT_c$ са колинеарни. Оттук лесно може да се види, че е изпълнена теорема 2. Освен това, от конкурентостта на правите AT_a, BT_b и CT_c , според теоремата на Брианшон, следва теорема 3. Следователно остава да се докаже теорема 4. Доказателството на теорема 4, както и нови доказателства на теореме 2 и 3, ще получим с използването на барицентрични координати спрямо дадения $\triangle ABC$, като $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0)$ и $C(0, 0, 1)$ [2]. Преди да преминем към аналитичните доказателства на формулираните теореми, ще припомним една връзка на описаната крива $\bar{k}(O)$ с други криви, което ни позволява да опростим някои разсъждения и пресмятания.

3. Фойербахова конфигурация. Нека $I(x_I, y_I, z_I)$ ($x_I + y_I + z_I = 1$) е произволна точка от равнината на $\triangle ABC$, нележаща на никоя от правите $BC, CA, AB, M_bM_c, M_cM_a$ и M_aM_b . Спрямо $\triangle ABC$ точката I има спрегнат триъгълник $I_A I_B I_C$ [2]. Точките

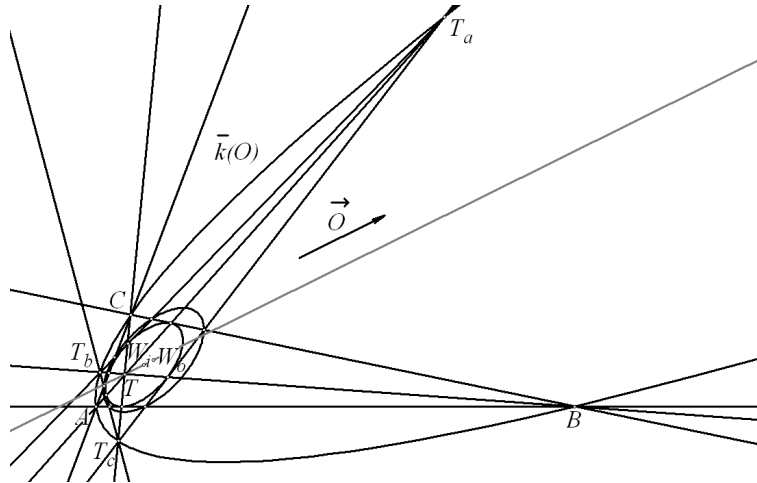
$I(x_I, y_I, z_I), I_A\left(-\frac{x_I}{1-2x_I}, \frac{y_I}{1-2x_I}, \frac{z_I}{1-2x_I}\right), I_B\left(\frac{x_I}{1-2y_I}, -\frac{y_I}{1-2y_I}, \frac{z_I}{1-2y_I}\right)$ и $I_C\left(\frac{x_I}{1-2z_I}, \frac{y_I}{1-2z_I}, -\frac{z_I}{1-2z_I}\right)$ са центрове на конични сечения $k(I), k(I_A), k(I_B)$

и $k(I_C)$, вписани в $\triangle ABC$. Средите на отсечките $II_A, II_B, II_C, I_B I_C, I_C I_A$ и $I_A I_B$ лежат на конично сечение $\bar{k}(O)$, описано за $\triangle ABC$ [3]. От резултатите, получени в [3], следва, че уравнението на кривата $\bar{k}(O)$ и координатите на центъра ѝ O са съответно следните:

$$(1) \quad \bar{k}(O) : x_I^2 y z + y_I^2 z x + z_I^2 x y = 0,$$

$$(2) O \left(\frac{(1-2x_I-2y_I z_I)x_I^2}{(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)}, \frac{(1-2y_I-2z_I x_I)y_I^2}{(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)}, \frac{(1-2z_I-2x_I y_I)z_I^2}{(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)} \right).$$

Коничните сечения $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$ и $\bar{k}(O)$ са свързани с редица общи свойства. Поради едно от тях казваме, че те са елементи на една *Фойербахова конфигурация* [4].



Фиг. 2

С използването на (1) в [1] са определени координатите на точката T_a . От резултата, получен в [1], следва, че координатите на точките T_a , T_b и T_c могат да се представят във вида:

$$(3) \begin{aligned} T_a & \left(\frac{x_I^2}{x_I^2 - 2y_I^2 - 2z_I^2}, -\frac{2y_I^2}{x_I^2 - 2y_I^2 - 2z_I^2} - \frac{2z_I^2}{x_I^2 - 2y_I^2 - 2z_I^2} \right), \\ T_b & \left(-\frac{2x_I^2}{y_I^2 - 2z_I^2 - 2x_I^2}, \frac{y_I^2}{y_I^2 - 2z_I^2 - 2x_I^2} - \frac{2z_I^2}{y_I^2 - 2z_I^2 - 2x_I^2} \right), \\ T_c & \left(-\frac{2x_I^2}{z_I^2 - 2x_I^2 - 2y_I^2}, -\frac{2y_I^2}{z_I^2 - 2x_I^2 - 2y_I^2}, \frac{z_I^2}{z_I^2 - 2x_I^2 - 2y_I^2} \right). \end{aligned}$$

4. Уравнения на кривите k_o и k_i в барицентрични координати. Първо ще определим уравненията на няколко прави. Затова ще припомним, че общото уравнение на права през точките $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ се намира чрез равенството:

$$(4) \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

От (4) и (5) намираме следните общи уравнения на прави:

$$\begin{aligned}
 T_b T_c &: -y_I^2 z_I^2 x + 2z_I^2 x_I^2 y + 2x_I^2 y_I^2 z = 0, \\
 T_c T_a &: 2y_I^2 z_I^2 x - z_I^2 x_I^2 y + 2x_I^2 y_I^2 z = 0, \\
 T_a T_b &: 2y_I^2 z_I^2 x + 2z_I^2 x_I^2 y - 2x_I^2 y_I^2 z = 0, \\
 AT_a &: z_I^2 y - y_I^2 z = 0, \\
 BT_b &: z_I^2 x - x_I^2 z = 0, \\
 AT_a &: y_I^2 x - x_I^2 y = 0.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

От последните три уравнения в (5) лесно се вижда, че правите AT_a , BT_b и CT_c минават през точката

$$T \left(\frac{x_I^2}{x_I^2 + y_I^2 + z_I^2}, \frac{y_I^2}{x_I^2 + y_I^2 + z_I^2}, \frac{z_I^2}{x_I^2 + y_I^2 + z_I^2} \right).
 \tag{6}$$

Оттук непосредствено се получава доказателство на теорема 4. От (6) се вижда, че точката T не може да е безкрайна, т.е. изпълнено е следното

Следствие 1. *Правите AT_a , BT_b и CT_c никога не са успоредни.*

От уравненията (5) получаваме координатите на въведените по-рано точки във вида:

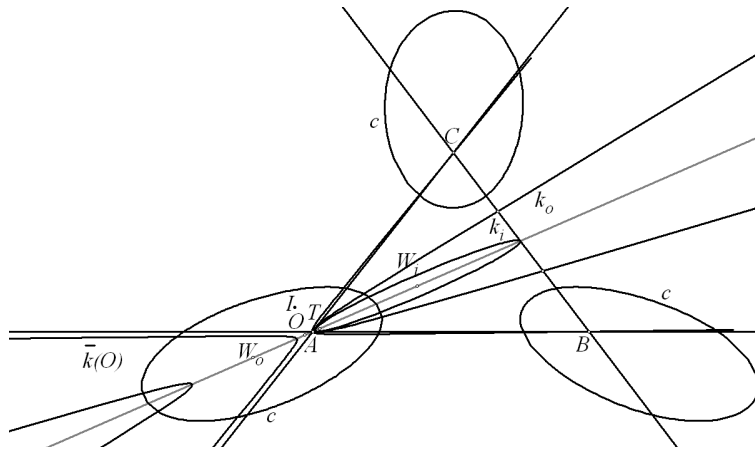
$$\begin{aligned}
 &B_c \left(\frac{2x_I^2}{2x_I^2 + z_I^2}, 0, \frac{z_I^2}{2x_I^2 + z_I^2} \right), B_a \left(\frac{x_I^2}{x_I^2 + 2z_I^2}, 0, \frac{2z_I^2}{x_I^2 + 2z_I^2} \right), \\
 &C_a \left(\frac{x_I^2}{x_I^2 + 2y_I^2}, \frac{2y_I^2}{x_I^2 + 2y_I^2}, 0 \right), C_b \left(\frac{2x_I^2}{2x_I^2 + y_I^2}, \frac{y_I^2}{2x_I^2 + y_I^2}, 0 \right), \\
 &A_b \left(0, \frac{y_I^2}{y_I^2 + 2z_I^2}, \frac{2z_I^2}{y_I^2 + 2z_I^2} \right), A_c \left(0, \frac{2y_I^2}{2y_I^2 + z_I^2}, \frac{z_I^2}{2y_I^2 + z_I^2} \right), \\
 &A_a \left(0, \frac{y_I^2}{y_I^2 + z_I^2}, \frac{y_I^2}{y_I^2 + z_I^2} \right), B_b \left(\frac{x_I^2}{z_I^2 + x_I^2}, 0, \frac{z_I^2}{z_I^2 + x_I^2} \right), A_a \left(\frac{x_I^2}{x_I^2 + y_I^2}, \frac{y_I^2}{x_I^2 + y_I^2}, 0 \right), \\
 &K_a \left(\frac{4x_I^2}{4x_I^2 + y_I^2 + z_I^2}, \frac{y_I^2}{4x_I^2 + y_I^2 + z_I^2}, \frac{z_I^2}{4x_I^2 + y_I^2 + z_I^2} \right), \\
 &K_b \left(\frac{x_I^2}{x_I^2 + 4y_I^2 + z_I^2}, \frac{4y_I^2}{x_I^2 + 4y_I^2 + z_I^2}, \frac{z_I^2}{x_I^2 + 4y_I^2 + z_I^2} \right), \\
 &K_c \left(\frac{x_I^2}{x_I^2 + y_I^2 + 4z_I^2}, \frac{y_I^2}{x_I^2 + y_I^2 + 4z_I^2}, \frac{4z_I^2}{x_I^2 + y_I^2 + 4z_I^2} \right).
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Сега от (7) и (8) лесно се проверява, че точките A_b , A_c , B_c , B_a , C_a , C_b лежат на крива k_o , а точките A_a , B_b , C_c , K_a , K_b и K_c лежат на крива k_i съответно със следните уравнения

$$(9) \quad k_o : 2(y_I^4 z_I^4 x^2 + z_I^4 x_I^4 y^2 + x_I^4 y_I^4 z^2) - 5x_I^2 y_I^2 z_I^2 (x_I^2 y z + y_I^2 z x + z_I^2 x y) = 0,$$

$$(10) \quad k_i : y_I^4 z_I^4 x^2 + z_I^4 x_I^4 y^2 + x_I^4 y_I^4 z^2 - 2x_I^2 y_I^2 z_I^2 (x_I^2 y z + y_I^2 z x + z_I^2 x y) = 0.$$

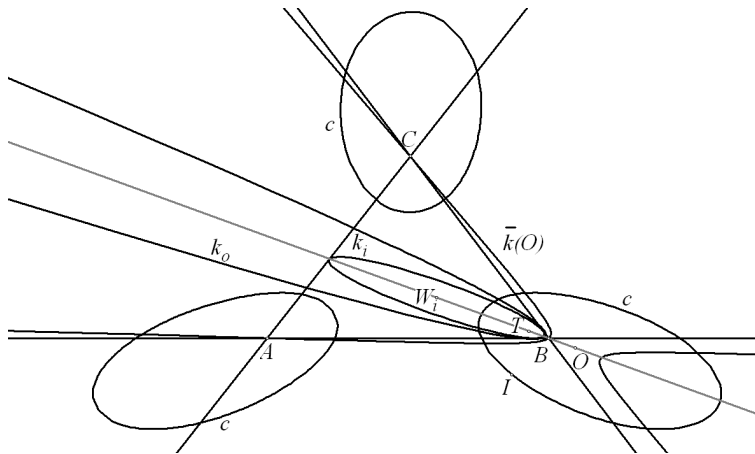
Получените уравнения (9) и (10) доказват теореми 2 и 3.



Фиг. 4

Теорема 7. Ако $\bar{k}(O)$ е хипербола, то в зависимост от положението на точката I , кривата k_o може да е елипса, парабола или хипербола. (Фиг. 3, 4, 5)

Следствие 2. Кривата k_o е парабола точно когато точката I лежи върху кривата от четвърта степен $c : x_I^4 + y_I^4 + z_I^4 - 10y_I^2z_I^2 - 10z_I^2x_I^2 - 10x_I^2y_I^2 = 0$. (Фиг. 5)



Фиг. 5

Едно забележително свойство на кривите k_o и k_i , което се наблюдава с GSP, е свързано с техните центрове. Затова първо ще покажем как се определя центърът на произволно конично сечение в равнината на ΔABC .

6. Координати на центъра на крива в равнината на даден триъгълник. Нека в равнината на ΔABC е дадена крива с уравнение

$$(13) \quad k : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = 0.$$

В последното уравнение заместваме $z = 1 - x - y$. Получаваме

$$k: \begin{aligned} & (a_{11} + a_{33} - 2a_{31})x^2 + (a_{22} + a_{33} - 2a_{23})y^2 + 2(a_{12} - a_{31} - a_{23} + a_{33})xy + \\ & + 2(a_{31} - a_{33})x + 2(a_{23} - a_{33})y + a_{33} = 0. \end{aligned}$$

Разглеждаме това равенство като уравнение на k спрямо афинна координатна система. От аналитичната геометрия ([5], [6]) е известно, че координатите на центъра на k се определят чрез системата линейни уравнения

$$\begin{cases} (a_{11} + a_{33} - 2a_{31})x + (a_{12} - a_{31} - a_{23} + a_{33})y + (a_{31} - a_{33}) = 0, \\ (a_{12} - a_{31} - a_{23} + a_{33})x + (a_{22} + a_{33} - 2a_{23})y + (a_{23} - a_{33}) = 0. \end{cases}$$

Като се умножат изразите в последните скоби на двете равенства с $1 = x + y + z$ и се извършат някои преобразувания, лесно се получава, че барицентричните координати на центъра на крива k , чието уравнение е (13), са решения на линейната система уравнения

$$(14) \quad \begin{cases} (a_{11} - a_{31})x + (a_{12} - a_{23})y + (a_{31} - a_{33})z = 0, \\ (a_{12} - a_{31})x + (a_{22} - a_{23})y + (a_{23} - a_{33})z = 0, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

7. Колинеарност на центровете на кривите $\bar{k}(O)$, k_o и k_i . Наблюденията с GSP ни насочват към следната

Теорема 8. *Центровете O , W_o , W_i съответно на кривите $\bar{k}(O)$, k_o , k_i и пресечната точка T на правите AT_a , BT_b и CT_c лежат на една права. (Фиг. 1, 2, 3, 4, 5)*

За да докажем теорема 8, от уравненията (9) и (10) на кривите k_o и k_i и системата (12) определяме координатите на съответните им центрове W_o и W_i по следния начин:

$$(15) \quad W_o \left(\frac{x_I^2(x_I^2 - 5y_I^2 - 5z_I^2)}{\tau_o}, \frac{y_I^2(y_I^2 - 5z_I^2 - 5x_I^2)}{\tau_o}, \frac{z_I^2(z_I^2 - 5x_I^2 - 5y_I^2)}{\tau_o} \right),$$

където $\tau_o = x_I^4 + y_I^4 + z_I^4 - 10(y_I^2z_I^2 + z_I^2x_I^2 + x_I^2y_I^2)$,

$$(16) \quad W_i \left(\frac{x_I^2(y_I^2 + z_I^2)}{y_I^2z_I^2 + z_I^2x_I^2 + x_I^2y_I^2}, \frac{y_I^2(z_I^2 + x_I^2)}{y_I^2z_I^2 + z_I^2x_I^2 + x_I^2y_I^2}, \frac{z_I^2(x_I^2 + y_I^2)}{y_I^2z_I^2 + z_I^2x_I^2 + x_I^2y_I^2} \right).$$

Сега след заместване на координатите на две тройки точки, представени с (1), (6), (15) и (16) в (4), получаваме доказателство на теорема 8.

От теорема 8 се получават следните уточнения в два специални случая:

Следствие 3. *Ако $\bar{k}(O)$ е парабола, точките W_o , W_i и T лежат на права, успоредна на оста на $\bar{k}(O)$. (Фиг. 2)*

Следствие 4. *Ако $\bar{k}(O)$ е хипербола и k_o е парабола, точките O , W_i и T лежат на права, успоредна на оста на k_o . (Фиг. 5)*

В заключение може да се каже, че с направените наблюдения и изследвания върху полученото в теорема 1 обобщение на олимпиадната задача получихме двойки забележителни конични сечения, определени от всяко описано за триъгълника

конично сечение. Доказаните теореми за тези конични сечения ни предлагат нов поглед върху обобщението, получено в [1].

Накрая е необходимо да се отбележи, че обобщения, свързани с конични сечения, но, използващи друг софтуер (Geogebra и Maple) за откриване и анализиране на различни резултати, се съдържат в работите [7], [8], [9].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] С. ГРОЗДЕВ, В. НЕНКОВ. Конкурентност, породена от тангенти. *Математика и информатика*, № 6, 2014.
- [2] Г. ПАСКАЛЕВ, И. ЧОБАНОВ. Забележителни точки в триъгълника. София, Народна просвета, 1985.
- [3] В. НЕНКОВ. Обобщение на теоремата на Фойербах. *Математика и информатика*, № 2, 2008, 35–42.
- [4] В. НЕНКОВ. Няколко свойства на Фойербаховата конфигурация. *Математика и информатика*, № 5, 2010, 42–61.
- [5] Г. СТАНИЛОВ. Аналитична геометрия. София, Наука и изкуство, 1979.
- [6] Н. МАРТИНОВ. Аналитична геометрия. София, Наука и изкуство, 1989.
- [7] П. ЛАЗАРОВА. Елиптичен арбелос. *Математика и информатика*, № 2, 2013, 159–175.
- [8] В. ZLATANOV. Some Properties of Reflection of Quadrangle about Point. *Annals. Computer Science Series*, **11**, No 1 (2013), 79–91.
- [9] В. ZLATANOV. An Etude on one Sharygin's Problem. *Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries*, **3**, No 2 (2014), 50–61.

Сава Иванов Гроздев
Институт по математика и информатика
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Веселин Ненков Ненков
Технически колеж Ловеч
ул. "Съйко Съев" № 31
Ловеч
e-mail: vnenkov@mail.bg

CONICS WITH COLINEAR CENTERS

Sava Grozdev, Veselin Nenkov

Two notable conics of the triangle are obtained in connection with a problem from the International Mathematical Olympiad in 2014. The conics are determined by an arbitrary circumscribed conic of the triangle.