МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2015
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2015
Proceedings of the Forty Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
SOK "Kamchia", April 2–6, 2015

ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕОРЕМАТА НА МИКЕЛ

Сава Гроздев, Веселин Ненков

В статията се разглежда едно обобщение на известна от геометрията на триъгълника теорема на Микел за три окръжности през една точка, в което окръжностите са заменени с подходящи централни конични сечения.

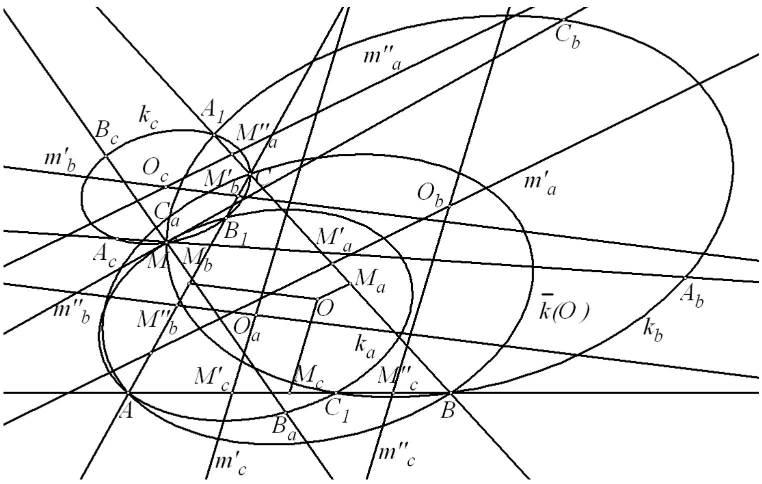
В геометрията на триъгълника е известна следната

Теорема на Микел. *Ако ABC е произволен триъгълник, а точките A_1, B_1 и C_1 лежат съответно върху правите BC, CA и AB, то описаните окръжности около триъгълниците B_1C_1A, C_1A_1B и A_1B_1C минават през една точка.* [1]

Основната цел на настоящата статия е да конструираме едно обобщение на теоремата на Микел, при което споменатите окръжности се заменят с подходящи конични сечения. Освен това ще определим някои свойства на тези конични сечения. Във всички конструкции ще подпомагаме действията си с динамичния софтуер "THE GEOMETER'S SKETCHPAD" (GSP). Тук трябва да се отбележи, че със същия успех може да се използва и динамичният софтуер Geogebra, както това е направено например в [2], [3], [4] във връзка с други обобщения, свързани с конични сечения.

Разглеждаме произволен триъгълник ABC. Твърденията, които ще формулираме с помощта на GSP, трябва да бъдат строго доказани. Те са свързани с резултати, доказани в [5] с барицентрични координати спрямо ΔABC. Освен това се очаква бъдещо доразвиване на разглежданата тема, което да използва получените тук резултати. Затова в доказателствата на следващите твърдения ще използваме барицентрични координати спрямо ΔABC. Барицентричните координати са въведени от А. Ф. Мьобиус в резултат на разглеждането на върховете на ΔABC като масови точки и решаването на задачата за определяне на четвърта точка в равнината на ΔABC, която да е масов център на тези масови точки [6]. Определянето на барицентрични координати спрямо ΔABC може да се извърши по следния начин: Нека Ω е произволна точка в пространството, а P е точка от равнината на ΔABC. Точката P е еднозначно определена с равенствата $\overrightarrow{\Omega P} = x\overrightarrow{\Omega A}+y\overrightarrow{\Omega B}+z\overrightarrow{\Omega C}$ и $x+y+z=1$ [1]. Реалните числа x, y и z се наричат барицентрични координати на точката P и това се отразява по следния начин: $P\left(x,y,z\right)$. За върховете на ΔABC от горните равенства имаме $A\left(1,0,0\right)$, $B\left(0,1,0\right)$ и $C\left(0,0,1\right)$ [1]. В някои случаи, както това е направено в [7], при определянето на координатите на някои точки е удобно преминаването от барицентрични координати към афинни и обратно. Тук няма да използваме този похват. Барицентричните координати са по-удобни, защото координатите на точките и коефициентите в уравненията се получават лесно по аналогия с вече намерените. Това спестява извършването на много пресмятания.

Ще преминем към основната цел на настоящата работа. Означаваме средите на страните BC, CA и AB съответно с M_a, M_b и M_c. Техните координати са следните $M_a\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, $M_b\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$ и $M_c\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$. Разглеждаме точката $O\,(x_0,y_0,z_0)$ $(x_0+y_0+z_0=1)$ като център на описано за ΔABC конично сечение $\bar{k}\,(O)$ (елипса или хипербола). Ако a_1, b_1 и c_1 са реални числа, то $A_1\,(0,a_1,1-a_1)$, $B_1\,(1-b_1,0,b_1)$ и $C_1\,(c_1,1-c_1,0)$ са точки съответно от правите BC, CA и AB (никоя от точките A_1, B_1 и C_1 не съвпада с връх на ΔABC). Средите на отсечките BA_1, CA_1, CB_1, AB_1, AC_1, BC_1 са съответно точките $M'_a\left(0,\dfrac{1+a_1}{2},\dfrac{1-a_1}{2}\right)$, $M''_a\left(0,\dfrac{a_1}{2},\dfrac{2-a_1}{2}\right)$, $M'_b\left(\dfrac{1-b_1}{2},0,\dfrac{1+b_1}{2}\right)$, $M''_b\left(\dfrac{2-b_1}{2},0,\dfrac{b_1}{2}\right)$, $M'_c\left(\dfrac{1+c_1}{2},\dfrac{1-c_1}{2},0\right)$, $M''_c\left(\dfrac{c_1}{2},\dfrac{2-c_1}{2},0\right)$ (Фиг. 1).



Фиг. 1

Когато $\bar{k}\,(O)$ е описаната окръжност около ΔABC, центърът на описаната за ΔB_1C_1A окръжност е пресечната точка на правите, минаващи през M''_b и M'_c, които са съответно успоредни на OM_b и OM_c. Затова при произволно конично сечение $\bar{k}\,(O)$ през точките M''_b и M'_c построяваме правите m''_b и m'_c, които са съответно успоредни на OM_b и OM_c. Означаваме пресечната им точка с O_a (Фиг. 1). След това построяваме коничното сечение k_a, което има за център точката O_a и е описано за ΔB_1C_1A. По аналогичен начин около триъгълниците C_1A_1B и A_1B_1C построяваме съответно коничните сечения k_b и k_c, центровете на които са съответно точките O_b и O_c (Фиг. 1). Наблюденията върху така построените криви с GSP показват, че е изпълнена следната

Теорема 1. *Кривите k_a, k_b и k_c имат обща точка M при произволни точки A_1, B_1 и C_1, лежащи съответно върху правите BC, CA и AB.* (*Фиг.* 1)

За да докажем теорема 1, първо определяме координатите на центровете O_a, O_b

и O_c. Параметричните уравнения на правите m''_b и m'_c са следните:

$$m''_b : \begin{cases} x = \dfrac{2-b_1}{2} + (1-2x_0)\,\alpha, \\ y = -2y_0, \\ z = \dfrac{b_1}{2} + (1-2z_0)\,\alpha, \end{cases}$$

$$m'_c : \begin{cases} x = \dfrac{1+c_1}{2} + (1-2x_0)\,\beta, \\ y = \dfrac{1-c_1}{2} + (1-2y_0)\,\beta, \\ z = -2z_0\beta, \end{cases}$$

където α и β са реални параметри.

От последните уравнения намираме координатите на O_a във вида

$$O_a\left(1-y_0b_1 - z_0(1-c_1), y_0.\frac{-(1-2y_0)b_1+2z_0(1-c_1)}{1-2x_0}, z_0.\frac{y_0b_1+(1-2z_0)(1-c_1)}{1-2x_0}\right). \tag{1}$$

По аналогичен начин определяме координатите на центровете O_b и O_c

$$\begin{aligned} &O_b\left(x_0.\frac{-(1-2x_0)(1-a_1)+2z_0c_1}{1-2y_0}, 1-x_0(1-a_1)-z_0c_1, z_0.\frac{2x_0(1-a_1)+(1-2z_0)c_1}{1-2y_0}\right), \\ &O_b\left(x_0.\frac{-(1-2x_0)a_1+2y_0(1-b_1)}{1-2z_0}, y_0.\frac{2x_0a_1-(1-2y_0)(1-b_1)}{1-2z_0}, 1-x_0a_1-y_0(1-b_1)\right). \end{aligned} \tag{2}$$

По-нататък ще определим уравнението на кривата k_a, като използваме преобразуването на координатите на точка при преминаването от един координатен триъгълник към друг. Нека $A'\,(x'_A, y'_A, z'_A)$, $B'\,(x'_B, y'_B, z'_B)$ и $C'\,(x'_C, y'_C, z'_C)$ са три неколинеарни точки от равнината на ΔABC. Ако точката P е представена с координатите си (x, y, z) спрямо ΔABC и с координати (x', y', z') спрямо $\Delta A'B'C'$, то координатите на P спрямо двата триъгълника са свързани с равенствата:

$$x = x'_Ax' + x'_By' + x'_Cz', \quad y = y'_Ax' + y'_By' + y'_Cz', \quad z = z'_Ax' + z'_By' + z'_Cz'. \text{ [1]}$$

Ако $A' \equiv A$, $B' \equiv C_1$ и $C' \equiv B_1$, последните равенства водят до връзките

$$x' = -x + \frac{c_1}{1-c_1}y + \frac{1-b_1}{b_1}z, \quad y' = \frac{1}{1-c_1}y, \quad z' = \frac{1}{b_1}z. \tag{3}$$

Спрямо ΔAC_1B_1 уравнението на кривата k_a може да се представи във вида

$$\left(1-2x'_{O_a}\right)x'_{O_a}y'z' + \left(1-2y'_{O_a}\right)y'_{O_a}z'x' + \left(1-2z'_{O_a}\right)z'_{O_a}x'y' = 0,$$

където x'_{O_a}, y'_{O_b} и z'_{O_c} са координатите на центъра O_a спрямо ΔAC_1B_1.

От последното равенство, като се използват (1) и (3), се получава уравнението на кривата k_a във вида

$$k_a : \begin{aligned} &(1-2x_0)\,x_0yz + (1-2y_0)\,y_0zx + (1-2z_0)\,z_0xy- \\ &-[c_1\,(1-2z_0)\,z_0y + (1-b_1)\,(1-2y_0)\,y_0z]\,(x+y+z) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

По аналогичен начин се получават уравненията на кривите k_b и k_c чрез равенствата:

$$k_b : \begin{aligned} &(1-2x_0)\,x_0yz + (1-2y_0)\,y_0zx + (1-2z_0)\,z_0xy- \\ &-[(1-c_1)\,(1-2z_0)\,z_0x + a_1\,(1-2x_0)\,x_0z]\,(x+y+z) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

$$(6) \qquad k_c: \quad \begin{aligned} &(1-2x_0)\,x_0yz+(1-2y_0)\,y_0zx+(1-2z_0)\,z_0xy- \\ &-[b_1(1-2y_0)\,y_0x+(1-a_1)(1-2x_0)\,x_0y](x+y+z)=0. \end{aligned}$$

От (4) и (5) получаваме, че общите точки на k_a и k_b лежат върху правата с уравнение $(1-c_1)(1-2z_0)\,z_0x-c_1(1-2z_0)\,z_0y+[a_1(1-2x_0)\,x_0-(1-b_1)(1-2y_0)\,y_0]\,z=0$, а от (4) и (6) се получава, че общите точки на k_a и k_c лежат върху правата, чието уравнение е

$$b_1(1-2y_0)\,y_0x+[(1-a_1)(1-2x_0)\,x_0-c_1(1-2z_0)\,z_0]\,y-(1-b_1)(1-2y_0)\,y_0z=0.$$

Тези уравнения, заедно с равенството $x+y+z=1$, образуват система, която има единствено решение, представящо координатите на общата точка $M(x_M,y_M,z_M)$ на кривите k_a, k_b и k_c във вида:

$$(7) \qquad \begin{aligned} x_M &= \frac{(1-2x_0)\,x_0}{\Delta}.[-a_1(1-a_1)(1-2x_0)\,x_0+(1-a_1)(1-b_1)(1-2y_0)\,y_0+ \\ &\qquad +c_1a_1(1-2z_0)\,z_0], \\ y_M &= \frac{(1-2y_0)\,y_0}{\Delta}.[a_1b_1(1-2x_0)\,x_0-b_1(1-b_1)(1-2y_0)\,y_0+ \\ &\qquad +(1-b_1)(1-c_1)(1-2z_0)\,z_0], \\ z_M &= \frac{(1-2z_0)\,z_0}{\Delta}.[(1-c_1)(1-a_1)(1-2x_0)\,x_0+b_1c_1(1-2y_0)\,y_0- \\ &\qquad -c_1(1-c_1)(1-2z_0)\,z_0], \end{aligned}$$

където

$$\begin{aligned} \Delta &= (1-2y_0)(1-2z_0)\,y_0z_0\,[(1-b_1)(1-c_1)+b_1c_1]+ \\ &+(1-2z_0)(1-2x_0)\,z_0x_0\,[(1-c_1)(1-a_1)+c_1a_1]+ \\ &+(1-2x_0)(1-2y_0)\,x_0y_0\,[(1-a_1)(1-b_1)+a_1b_1]- \\ &-(1-2x_0)^2\,x_0^2a_1(1-a_1)-(1-2y_0)^2\,y_0^2b_1(1-b_1)-(1-2z_0)^2\,z_0^2b_1(1-b_1). \end{aligned}$$

С това теорема 1 е доказана. $\square$

Любопитно е да се отбележи специалният случай на теорема 1, при който точките A_1, B_1 и C_1 лежат на една права. Преди това ще припомним, че точките $U(x_U,y_U,z_U)$, $V(x_V,y_V,z_V)$ и $W(x_W,y_W,z_W)$ от равнината на ΔABC лежат на една права тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството:

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} x_U & y_U & z_U \\ x_V & y_V & z_V \\ x_W & y_W & z_W \end{vmatrix} = 0.[1]$$

От (8) и координатите на точките A_1, B_1 и C_1 се вижда, че те лежат на една права тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството $(1-a_1)(1-b_1)(1-c_1)+a_1b_1c_1=0$. От друга страна, тъй като кривата $\bar{k}(O)$ се представя с уравнението

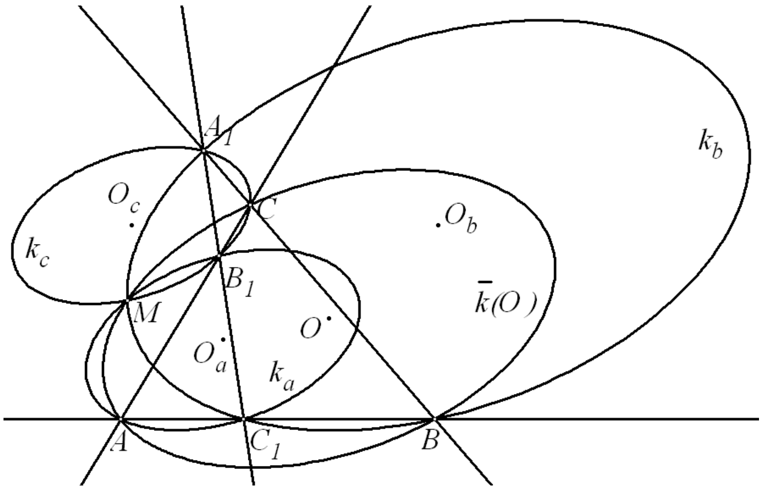
$$(9) \qquad \bar{k}(O): \ (1-2x_0)\,x_0yz+(1-2y_0)\,y_0zx+(1-2z_0)\,z_0xy=0[8],$$

то точката M, координатите на която удовлетворяват равенствата (7), лежи върху $\bar{k}(O)$ тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството

$$\frac{(1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_0)\,x_0y_0z_0\,[(1-a_1)(1-b_1)(1-c_1)+a_1b_1c_1]}{\Delta}=0.$$

Последното означава, че е изпълнена следната

Теорема 2. *Четирите криви $\bar{k}\,(O)$, k_a, k_b и k_c минават през една точка M тогава и само тогава, когато точките A_1, B_1 и C_1 лежат на една права.* (*Фиг.* 2)



Фиг. 2

Интересно е да се отбележи, че може да се определи видът на кривите k_a, k_b и k_c в зависимост от вида на $\bar{k}\,(O)$. От (4), (5), (6), (9) и резултатите, получени в [7], следват следните твърдения:

Теорема 3. *Ако кривата $\bar{k}\,(O)$ е елипса, то кривите k_a, k_b и k_c са елипси, хомотетични на $\bar{k}\,(O)$* (*Фиг.* 1).

Теорема 4. *Ако кривата $\bar{k}\,(O)$ е хипербола, то кривите k_a, k_b и k_c са хиперболи, хомотетични на $\bar{k}\,(O)$ или на нейната спрегната $\bar{\bar{k}}\,(O)$.*

Друго забележително свойство на кривите k_a, k_b и k_c и точката M е свързано с точките, симетрични на A_1, B_1 и C_1 спрямо центровете на k_a, k_b и k_c. Нека точките A_b и A_c са симетрични на A_1 съответно спрямо O_b и O_c, точките B_c и B_a са симетрични на B_1 съответно спрямо O_c и O_a, а точките C_a и C_b са симетрични на C_1 съответно спрямо O_a и O_b (Фиг. 1). От (1) и (2) за координатите на тези точки намираме:

$$A_b\left(-2x_0.\frac{(1-2x_0)(1-a_1)-2z_0c_1}{1-2y_0}, 1+(1-2x_0)(1-a_1)-2z_0c_1,\right.$$
$$\left.(1-2z_0).\frac{(1-2x_0)(1-a_1)-2z_0c_1}{1-2y_0}\right),$$

$$A_c\left(-2x_0.\frac{(1-2x_0)\,a_1-2z_0\,(1-b_1)}{1-2y_0},(1-2y_0)\,.\frac{(1-2x_0)\,a_1-2z_0\,(1-b_1)}{1-2y_0},\right.$$
$$\left.1+(1-2x_0)\,a_1-2z_0\,(1-b_1)\right),$$

$$B_c\left((1-2x_0)\,.\frac{(1-2y_0)\,(1-b_1)-2x_0a_1}{1-2z_0},-2y_0.\frac{(1-2y_0)\,(1-b_1)-2x_0a_1}{1-2z_0},\right.$$
$$\left.1+(1-2y_0)\,(1-b_1)-2x_0a_1\right),$$

$$B_a\left(1+(1-2y_0)\,b_1-2z_0\,(1-c_1)\,,-2y_0.\frac{(1-2y_0)\,b_1-2z_0\,(1-c_1)}{1-2x_0},\right.$$
$$\left.(1-2z_0)\,.\frac{(1-2y_0)\,b_1-2z_0\,(1-c_1)}{1-2x_0}\right),$$

$$C_a\left(1+(1-2z_0)\,(1-c_1)-2y_0b_1,(1-2y_0)\,.\frac{(1-2z_0)\,(1-c_1)-2y_0b_1}{1-2x_0},\right.$$
$$\left.-2z_0.\frac{(1-2z_0)\,(1-c_1)-2y_0b_1}{1-2x_0}\right),$$

$$C_b\left((1-2x_0)\,.\frac{(1-2z_0)\,c_1-2x_0\,(1-a_1)}{1-2y_0},1+(1-2z_0)\,c_1-2x_0\,(1-a_1)\,,\right.$$
$$\left.-2z_0.\frac{(1-2z_0)\,c_1-2x_0\,(1-a_1)}{1-2y_0}\right).$$

От координатите на тези точки, (7) и (8) установяваме следната

Теорема 5. *Правите A_bA_c, B_cB_a и C_aC_b се пресичат в точката M (Фиг. 1).*

Накрая да разгледаме случая, при който правата BB_1 е успоредна на OM_b, а правата CC_1 е успоредна на OM_c. Тогава са изпълнени равенствата $b_1=\dfrac{1-2z_0}{2y_0}$ и $c_1=\dfrac{1-2x_0}{2z_0}$. Оттук следва, че правите BB_1 и CC_1 се пресичат в точката

$$H\,(1-2x_0,1-2y_0,1-2z_0)\,.$$

За произволна точка A_1 от BC чрез равенството (8) получаваме следната

Теорема 6. *Точките A_b, A_c, M и H лежат на една права.*

Като допълнение на теорема 6 ще отбележим, че когато $AA_1 \parallel OM_a$, то $M\equiv H$. Теорема 6 се явява обобщение на една от задачите от Международната олимпиада по математика през 2013 г., която е описана подробно в [5].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Паскалев, И. Чобанов. Забележителни точки в триъгълника. София, Народна просвета, 1985.

[2] П. Лазарова. Елиптичен арбелос. Математика и информатика, 2, 2013, 159–175.
[3] B. Zlatanov. Some Properties of Reflection of Quadrangle about Point. *Annals. Computer Science Series*, **11**, No 1 (2013), 79–91.
[4] B. Zlatanov. An Etude on one Sharygin's Problem. *Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries*, **3**, No 2 (2014), 50–61.
[5] С. Гроздев, В. Ненков. Един вид централни конични сечения през една точка. *Математика плюс*, № 4 (2013), 66–72.
[6] М. Балк, В. Болтянский. Геометрия масс. Москва, Наука, 1987.
[7] С. Гроздев, В. Ненков. Хомотетични конични сечения в равнината на триъгълник. Математика и информатика, № 2 (2014), 139–154.
[8] С. Гроздев, В. Ненков. Обобщения некоторых классических теорем геометрии треугольника. Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования. Сборник материалов международной научной конференции. Архангельск, САФУ, 2014, 35–54.

Сава Иванов Гроздев
Институт по математика и информатика
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Веселин Ненков Ненков
Технически колеж Ловеч
ул. "Съйко Съев" № 31
Ловеч
e-mail: vnenkov@mail.bg

A GENERALIZATION OF THE MIQUEL THEOREM

Sava Grozdev, Veselin Nenkov

The paper considers a generalization of the well-known Miquel theorem from the geometry of the triangle, when the three circles through a point are replaced by suitable central conics.