

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2015  
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2015  
*Proceedings of the Forty Fourth Spring Conference  
of the Union of Bulgarian Mathematicians  
SOK "Kamchia", April 2–6, 2015*

## МАТЕМАТИЧЕСКИ ПРОЕКТИ В ДИНАМИЧНИ СРЕДИ

Ангел Гушев

Няма възрастови граници за използване на динамичния математически софтуер. Няма ограничения и в начините на използването му и дълбочината на постигнатите резултати. Единственото ограничение се крие в способностите и въображението на тези, които го използват.

Настоящата статия описва един „нестандартен“ подход при мотивиране на учениците за изучаване на разделите „Комплексни числа“ и „Елементи на аналитичната геометрия в равнината“ в XII клас, профилирана подготовка, довел до „изненадващо“ добри резултати.

Публикациите на автора са насочени предимно към изучаването на геометрия в гимназиалния етап на образование посредством динамичен математически софтуер. В последната си публикация „Динамичният математически софтуер – от нула до безкрайност“ [3] авторът показва, че **няма възрастови граници за използването на динамичния математически софтуер. Няма ограничения и в начините на използването му и дълбочината на постигнатите резултати. Единственото ограничение се крие в способностите и въображението на тези, които го използват.**

Настоящата статия описва един „нестандартен“ подход при мотивиране на учениците за изучаването на разделите „Комплексни числа“ и „Елементи на аналитичната геометрия в равнината“ в XII клас, профилирана подготовка, довел до „изненадващо“ добри резултати.

Преподаването на посочените раздели не е най-приятното занимание за учителя. Това е така, защото те са разположени в края на учебника и не влизат нито в учебното съдържание за Държавните зрелостни изпити, нито в конспекта за кандидатстудентските изпити.

Най-често срещаната реплика от учениците е: „Защо ще ги учим тези неща, след като никъде няма да ни трябват?“. Тази реплика учителят чува не само по адрес на посочените раздели, но нашата задача в момента не е да се занимаваме с мотивацията на учениците, а да покажем как конкретна ситуация може да даде отговор на горепосочения въпрос.

Опитът на автора показва, че учениците в ПМГ „Васил Друмев“, гр. Велико Търново, също не проявяват особен ентузиазъм при изучаването на посочения материал. В един от часовете ученичка, вместо да внимава, рисува нещо в тетрадката си. Ако това беше средно-статистическа ученичка, това нямаше да направи особено впечатление. Изненадващото беше, че въпросната ученичка беше с изявени интереси в областта на математиката, неизменен участник в състезания и олимпиади.

Оказа се, че тя рисува задача от перспектива, която е част от подготовката ѝ за изпитите по рисуване в УАСГ (Фиг. 1). Като повечето ученици от математическите и природо-математическите гимназии, тя знаеше, че не математиката, а рисуването може да се окаже „препъни камък“ в реализирането на нейната мечта – да следва архитектура.

Предизвикателството на автора към тази ученичка беше да направи същата конструкция, използвайки динамичния математически софтуер GeoGebra.

За осъществяване на идеята, освен умения за работа с динамичната среда, които ученичката притежаваше, бяха необходими и основни познания по аналитична геометрия. Ето го и отговорът на въпроса, който вече беше поставен.

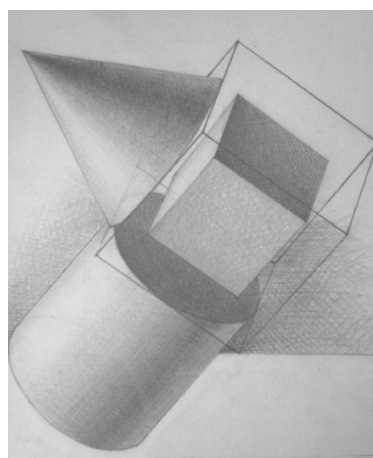
Допълнителен стимул за работа беше възможно участие в заключителен семинар по проект „Фибоначи“, както и участие в Националния кръг на международния проект „Математика и проектиране“.

Предизвикателството не беше прието веднага, тъй като реализирането на подобна задача изисква допълнителни усилия и време. А именно времето е това, което не достига на дванадесетокласниците в последните месеци преди държавните зрелостни и кандидатстудентските изпити.

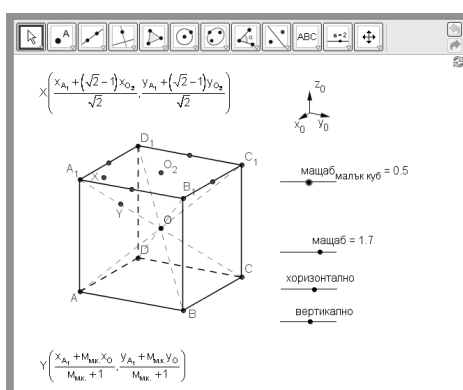
Едва когато в екипа реши да се включи още една ученичка, която да поеме работата по дизайна и оформлението на проекта, стана ясно, че въпреки кратките срокове и прекалената натовареност на всеки от участниците, си струва да се опита.

За да бъде максимално съпричастен към реализирането на проекта, авторът предостави на участничките модел на куб, който да послужи за основа на конструкцията.

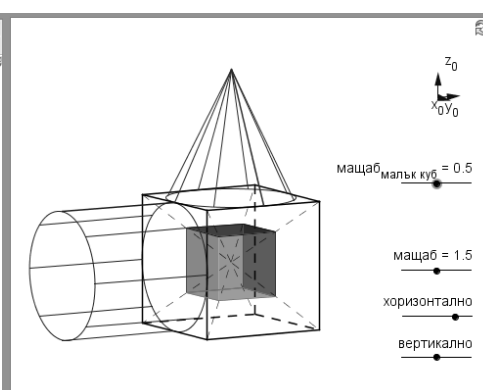
В хода на работата се оказа, че богатият набор от инструменти, с които разполага



Фиг. 1



Фиг. 2



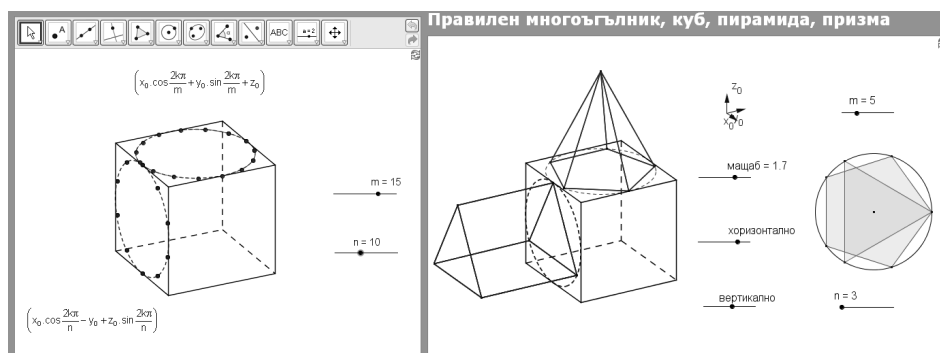
Фиг. 3

динамичният математически софтуер GeoGebra, не е достатъчен за построяване на конструкцията и ще трябва да се използва координатния метод. С цел постигане на по-голяма динамика, ситуацията беше подходящо параметризирана.

Знаейки координатите на точка, която дели отсечка в дадено отношение и построявайки точка чрез задаване на нейните координати, имаме възможност да построим един от върховете на вписания куб и петата точка, необходима ни да построим вписаните в успоредниците  $A_1B_1C_1D_1$  и  $ADD_1A_1$  елипси (Фиг. 2). Оттук до конструкцията, дадена на Фиг. 3, се достига само с използване на инструментите, предоставени ни от динамичната среда.

Следващата стъпка в реализиране на проекта беше реализиране на подобна конструкция, в която цилиндърът да бъде заменен от правилна  $n$ -ъгълна призма, а конусът – от правилна  $m$ -ъгълна пирамида.

На пръв поглед задачата не изглежда по-трудна от предходната, но докато в предишния случай GeoGebra предоставя възможност за чертане на крива от втора степен по пет точки, тук всичко трябва да се направи от потребителя. Отново използвайки подходяща параметризация и построявайки точките чрез задаване на координатите им, получаваме конструкцията от Фиг. 4.



Фиг. 4

Фиг. 5

Фигура 5 показва как на една чертожна повърхност могат да се позиционират тримерен и двумерен модел.

За да намерим приложение на комплексните числа в конструкцията на Фигура 5, можем да приемем, че ако  $k$  е окръжност с център началото на координатната система и радиус 1, тогава върховете на правилните многоъгълници, вписани в  $k$ , ще бъдат точките, съответстващи на корените на уравненията  $z^n = 1$  и  $z^m = 1$ , където  $z \in \mathbb{C}$  е комплексно число.

Докато едната ученичка работеше върху динамичните конструкции, другата успя да създаде уеб-базирано приложение в HTML формат, което се визуализираше еднакво добре от най-често използваните браузъри като Internet Explorer, Mozilla Firefox, Opera, Google Chrome и др. (Фиг. 6). Проектът, наречен „Динамична математика“ може да се види на сайта на ПМГ „Васил Друев“ [10].

Трудът на авторите беше възнаграден, като на Националния кръг на международния конкурс „Математика и проектиране“ през 2013 г. проектът зае трето място в раздела „Геометрични миниатюри“.



Фиг. 6

Явяването на националния кръг беше изключително полезно за двете ученички. Освен че успяха да видят проектите на останалите финалисти, те се убедиха, че понякога е по-важно не какъв проект си направил, а как ще съумееш да го представиш.

На непредубедения читател може да се стори, че постигането на толкова добри резултати за толкова кратко време е почти невъзможно. Това в действителност е така, що се отнася до средностатистическите ученици, пък били те и от профилирана в областта на математиката и информатиката гимназия.

Едно от нещата, което направи възможно реализирането на проекта в кратки срокове, бе фактът, че още от постъпването си в гимназията учениците от този клас, в часовете по математика, бяха запознати с възможностите на динамичния математически софтуер GeoGebra. През петте си години на обучение те имаха възможност да обогатяват своите знания и да ги надграждат. Именно работата с учениците от този клас доведе до написването на статия [2].

През целия творчески период връзките „ученици – научен ръководител“ и „ученици – работа по поставен проблем“ бяха ползотворни и двустранни. Те показаха, че работата в екип по предварително изготвен план дава добри резултати.

При разработката на проекта „Динамична математика“ водеща беше ролята на учителя. Под негово ръководство учениците систематизираха познанията си по математика, затвърдиха уменията си за работа с GeoGebra и придобиха основни познания при създаването на веб-базирани приложения.

Учителят отново се увери, че ако се подбират изявени ученици, желаещи да работят в конкретно направление, и ако техният труд умело се насочва, могат да се получат продукти от най-високо качество. До тези изводи той беше достигнал още при работата си по предходни проекти, отразена в [7].

В заключение трябва да кажем, че посоченият пример е по-скоро нетипичен и нестандартен, което го прави почти неприложим в масовата практика. Според автора той трябва да послужи повече за мотивация на учителите в стремежа им да търсят все по-нестандартни подходи за задържане вниманието и запазване мотивацията на

учениците не само при изучаването на математика, но и на всички останали дисциплини. Използването на динамичен софтуер е само една от посоките в търсенето на тези подходи.

При това трябва да знаем, че:

- динамичният математически софтуер не може да ни помогне в решаването или онагледяването на всяка задача;
- използването на динамичен софтуер трябва да е премерено и само там, където ще се възприеме като ефект, а не като дефект в работата;
- ако нямаме ясна идея какво и как искаме да постигнем при решаването на даден проблем, е без значение с какъв софтуер разполагаме;
- няма възрастови граници за използването на динамичния математически софтуер. Няма ограничения и в начините на използването му и в дълбочината на постигнатите резултати. Единственото ограничение се крие в способностите и въображението на тези, които го използват.

Тези принципи са били водещи за автора при създаването на динамични обучаващи среди, като [1], или при участието му в проекти, като [8].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. ГУШЕВ, В. ГУШЕВ. Електронен учебник по математика за осми клас. *Математика и математическо образование*, **36** (2007), 341–348.
- [2] А. ГУШЕВ. Динамична математика за всеки. сп. *Математика и информатика*, бр. 4 (2010), 15–20.
- [3] А. ГУШЕВ, В. ГУШЕВ. Динамичният математически софтуер – от нула до безкрайност. Изследователски подход в образованието по математика, Регалия 6, 2013, 5–10.
- [4] П. КЕНДЕРОВ. Иновации в математическото образование: европейските проекти *InnoMathEd* и *Fibonacci*. *Математика и математическо образование*, **39** (2010), 63–72.
- [5] Б. ЛАЗАРОВ, М. ГОДОРОВА. Организиране на изследователското търсене на учениците в среда на система за динамична геометрия. *Образование и технологии*, Том 2, 2011.
- [6] Т. ТОНОВА, В. ГУШЕВ, Е. КОПЕВА. Образователна среда за графично решаване на параметрични задачи, *Математика и информатика*, бр. 5 (2005), 1–19; бр. 6 (2005), 4–8; бр. 1 (2006), 10–15.
- [7] URL: [http://www.math.bas.bg/~omi/DidMod/volume01\\_2007\\_2008.htm](http://www.math.bas.bg/~omi/DidMod/volume01_2007_2008.htm). Involving Students in Software Design by Mathematical Projects
- [8] URL: <http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/archive.htm>.
- [9] URL: <http://fibomath.swu.bg/content/list.php>.
- [10] URL: [http://www.pmgvt.org/projects/Projekt\\_math/index.html](http://www.pmgvt.org/projects/Projekt_math/index.html).

Ангел Андреев Гушев  
ПМГ „Васил Друмев“  
ул. „Вела Благоева“ 10  
5000 Велико Търново  
e-mail: [angel\\_hg@abv.bg](mailto:angel_hg@abv.bg)

## MATHEMATICAL PROJECTS IN DYNAMIC ENVIRONMENTS

**Angel Gushev**

There are no age limits for the use of dynamic mathematics software. There are no limits for the methods used and for the depth of the results. The only limitation lies in the skill and imagination of those who use it.

This article describes an “unconventional” approach to motivating students to study the topics “Complex numbers” and “Elements of analytic geometry in the plane” in 12th grade which led to some “surprising” results.