

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2015
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2015
*Proceedings of the Forty Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
SOK "Kamchia", April 2–6, 2015*

**ИНТЕГРИРАНЕ НА ЗНАНИЯ И УМЕНИЯ
ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА ЧРЕЗ
СЪЗДАВАНЕ НА КОМПЮТЪРНИ ПРОГРАМИ
ЗА РЕШАВАНЕ НА ДИОФАНТОВИ УРАВНЕНИЯ***

Коста Гъргов, Цветана Димитрова

Настоящата работа е посветена на описанието на един подход за интегриране на знания и умения по математика и информатика чрез създаване на компютърни програми за решаване на Диофантови уравнения от ученици, които се обучават в 4.–5. клас на българските училища. Темата, която се разглежда, е позната – решаване на диофантови уравнения от първа степен с две неизвестни, т.е. уравнения от вида $ax + by = c$, където a , b и c са дадени естествени числа, а неизвестните x и y се търсят в множеството, състоящо се от всички естествени числа и нулата. Такъв тип задачи се решават от 10–11 годишни ученици в кръжоци и школи по математика, като се използват някои свойства на делимостта на числата или се прилагат методи на пълното изчерпване. Темата събужда интереса и на ученици, които участват в кръжоци и школи по информатика и се явяват на национални състезания и турнири в състезателна група Е (4.–5. клас). С помощта на компютърни програми, написани на езика C++, се намират всички решения на дадено диофантово уравнение или се установява, че то няма такива в множеството на естествените числа и нулата. За написването на програмите състезателите по информатика трябва да придобият математически знания за делимост на естествени числа и да познават алгоритми за намиране на НОД, НОК и др. Работата е предназначена за учители по информатика и информационни технологии.

Въведение. През 1968 г. известната фирма IBM, по това време най-големият производител на хардуер и софтуер в света, въвежда т.н. политика на „*unbundling*“. Това означава, че софтуерът, който дотогава се е давал като безплатна добавка към хардуера, започва постепенно да се продава. Този ход на IBM, развитието на компютърната техника и масовото ѝ приложение в практиката дават мощен тласък за развитие на софтуерната промишленост. Така днес тя е една от най-бързо развиващите се индустрии с годишен оборот стотици милиарди долари. В национален и световен мащаб има „глад“ за качествени специалисти в областта на информатиката и ИТ.

* **2010 Mathematics Subject Classification:** 97D20, 97D40, 97C30, 97C90.

Ключови думи: делимост, пълно изчерпване, диофантово уравнение, програмиране, интегриране.

Олимпиадите и състезанията по информатика и ИТ са едни от основните източници на елитни специалисти в областта на разработката на софтуер. Талантливите ученици в областта на информатиката и ИТ изявяват своите знания и умения чрез участие в различни олимпиади и състезания. Тези деца започват подготовката си от ранна възраст и напредват много бързо в усвояването на знания и умения по информатика и ИТ. Участията и класиранията им в различни състезания се явяват мощен стимул за допълнителна подготовка и самоподготовка. Така те обикновено изпреварват връстниците си по пътя на знанието.

България има традиции в работата с изявени ученици в областта на информатиката и ИТ. Младите български информатици са сред най-добрите в света, за което говорят стотиците отличия, завоювани на международни състезания. България е една от първите страни в света, в които се провежда национална олимпиада по информатика – първата такава олимпиада под егидата на МОН се провежда в София през 1985 г. Можем да се гордеем и с факта, че първата международна олимпиада по информатика (IOI) се провежда в нашата страна – през 1989 г. в Плевен. И в момента у нас функционира стройна система за откриване и подготовка на таланти в областта на информатиката. Съгласно регламентите на МОН, участниците в олимпиадите и състезанията по информатика са разпределени в 5 възрастови групи: група А (11–12 клас), В (9–10 клас), С (8 клас), D (6–7 клас) и Е (4–5 клас). За всяка от състезателните групи е съставена примерна учебна програма, която е съгласувана и приета от комисията за извънкласна работа по информатика към МОН. За класовете от шести до десети тя е приета през 2007/2008 учебна година [3], а за 5. клас – през 2010 година [4].

Обучението на най-малките състезатели от група Е започва с интензивно изучаване на обектноориентиран език C++ (изборът на език е съобразен с регламента за участие в международните състезания по информатика) в среда Dev-C++ 4.9.9.2 или Code::Blocks 10.05. Наред с първите стъпки в програмирането, учениците започват да натрупват знания за редица базови алгоритми, които са необходими за решаване на задачи в следващите състезателни групи. Една от първите теми, която се изучава в школите по информатика, е „Алгоритми, свързани с теория на числата“. Учениците трябва да се запознаят с алгоритми за намиране на делители на числа, намиране на най-голям общ делител (НОД) на две и повече числа, намиране на най-малко общо кратно (НОК) на две и повече числа, намиране на прости числа и др. Вижда се, че за решаване на поставените задачи е необходимо интегриране на знания и умения както по математика, така и по информатика.

Изложение. Една от основните тенденции в съвременното развитие на педагогиката е интеграцията на знания от различни области на науката. Прието е, че същността на интеграцията е синтетичното изграждане на цялото от части. Може да се счита, че интеграцията е форма на теоретичен синтез, осъществяван в границите на отделния учебен предмет и проявяващ се във вид на междудисциплинарен синтез. В настоящата работа ще покажем една възможност за интегриране на знания между учебните дисциплини Математика и Информатика. За целта ще покажем интеграцията между двата учебни предмета чрез изучаване на темата „Диофантови уравнения“.

Намирането на НОД на числа се използва при решаване на уравнението $ax+by=c$, където a , b и c са дадени естествени числа, а неизвестните x и y се търсят в множес-

твото, състоящо се от всички естествени числа и нулата. Това уравнение се нарича диофантово уравнение от първа степен с две неизвестни в чест на гръцкия математик Диофант. В своя труд „Аритметика“ Диофант е решил голям брой такива уравнения.

Необходимото и достатъчно условие да е решимо уравнението $ax + by = c$ е $\text{НОД}(a, b)$ да дели c . Ако x_0 и y_0 са решения на това уравнение, то всичките му решения са: $x = x_0 + \frac{b}{\text{НОД}(a, b)}k$; $y = y_0 - \frac{a}{\text{НОД}(a, b)}k$, където k е произволно естествено число.

Теоретичното доказателство на тези твърдения е невъзможно за 10–11 годишни ученици. Ето защо чрез конкретни задачи и програми, написани на C++, тествани с различни входни данни, ще достигнем до съответните изводи.

Нека разгледаме следната задача, публикувана в [1]:

Задача 1. В един клас момичетата са не повече от шест. За една екскурзия в чужбина трябвало да събират от всяко момиче по 1200 лв., а от всяко момче по 1500 лв. Колко са момичетата и колко са момчетата в този клас, ако събраната сума е 27300 лв.?

Математическо описание на решението на задачата. Нека означим с x броя на момичетата, а с y – броя на момчетата. Можем да запишем следното равенство:

$$(1) \quad 1200x + 1500y = 27300,$$

което всъщност е диофантово уравнение от първа степен с две неизвестни.

Намира се $\text{НОД}(1200, 1500) = 300$. Разделят се двете страни на равенството на 300. Получава се еквивалентното уравнение

$$(2) \quad 4x + 5y = 91.$$

В условието е посочено, че „момичетата са не-повече от 6“, което явно определя допустимите стойности за x , т.е. 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6.

С последователна проверка се установява за кои от тези стойности е вярно уравнението $y = (91 - 4x) : 5$. Така се намира, че уравнението (2) има решение при $x = 4$ и $y = 15$.

Отговор: Уравнение (1) има едно решение и то е $4.4 + 5.15$.

Анализ на решението на задачата на езика на C++: Нека представим уравнението (1) във вида

$$(3) \quad a*x+b*y=c,$$

където $a = 1200$, $b = 1500$ и $c = 27300$.

С помощта на функцията `int NOD(int a, int b)` пресмятаме най-големия общ делител на числата a и b . Записваме тази стойност в променлива с име d , т.е. $d = \text{NOD}(a, b)$;

Разделяме двете страни на равенството на d и записваме резултатите в три нови променливи, съответно $a1 = a/d$; $b1 = b/d$; $c1 = c/d$. Така уравнението добива вида

$$(4) \quad a1*x+b1*y=c1.$$

Стойностите на x , които могат да бъдат решения на уравнение (4), са от 0 до 6. С оператор `for` сме сигурни, че ще обходим последователно този интервал, т.е. `for (i=0; i<=6; i++)`. Проверяваме за кои стойности на x е вярно, че $c1 - a1*x$ да

се дели на $b1$ без остатък, т.е. $\text{if}((c1-i*a1)\%b1==0)$. Остана да оформим изхода: `cout<<a1<<"*"<<i<<"+"<<b1<<"*"<<(c1-i*a1)/b1<<endl`; и да подсигурим извеждане на резултат, в случай че уравнението няма решение. За целта ще използваме една променлива $br=0$, която, ако след изпълнение на програмата не се промени, това означава, че нямаме решение и извеждаме съобщението „No“. Примерна програмна реализация на подобна задача на езика Бейсик е представена в [2].

Решение на задачата на езика C++.

```
#include <iostream>
using namespace std;
int NOD(int a, int b)
{
    while (a!=b)
    {
        if (a>b)
            a-=b;
        else b-=a;
    }
    return a;
}
int main ()
{
    longlong a = 1200, b=1500, c=27300,d, br, a1, b1, c1,i;
    d = NOD (a, b);
    a1 = a/d;
    b1 = b/d;
    c1 = c/d;
    for(i=0; i<=6; i++)
    {
        if((c1-i*a1)%b1==0)
        {
            cout<<a1<<"*"<<i<<"+"<<b1<<"*"<<(c1-i*a1)/b1<<endl;
            br++;
        }
    }
    if(br==0)cout<<"No"<<endl;
    return 0;
}
```

Изход: $4*4+5*15$

Тази задача в състезателната информатика може да има следната формулировка:

Задача 2. За една екскурзия в чужбина трябвало да събират от всяко момиче по 1200 лв., а от всяко момче по 1500 лв. Да се състави програма `trip.cpp`, която, по зададена събрана сума s , извежда всички възможни комбинации от броя момичета и момчета, ако събраната сума е равна на s .

На стандартния вход се въвежда едно цяло положително число s – събраната сума от учениците.

На стандартния изход се извеждат всички възможни комбинации, всяка на отделен ред. Ако не съществува такава комбинация в множеството на естествените числа и нулата, програмата да извежда „uravnenieto nqma reshenie v mnojestvoto na estestvenite chisla“.

Примерен вход 1:

29000

Примерен изход 1:

uravnenieto nqma reshenie v mnojestvoto na estestvenite chisla

Примерен вход 2:

27300

Примерен изход 2:

4*4+5*15

4*9+5*11

4*14+5*7

Анализ на решението. Отново означаваме с x броя на момчетата, а с y – броя на момчетата. Можем да запишем диофантовото уравнение $1200 * x + 1500 * y = c$.

Нека заместим с първия примерен вход, т.е при $c = 29000$. Тогава

$$(5) \quad 1200 * x + 1500 * y = 29000.$$

Тъй като $\text{НОД}(1200, 1500) = 300$, но 300 не дели 29000, уравнението няма решение в множеството на естествените числа.

Както се забелязва, така формулирана задачата става малко по-трудна и поради това, че няма ограничение за никое от двете неизвестни x или y , което ни подсеща, че ще трябва да намерим начин да определим такова.

За целта търсим число y , което умножено по $b1$ дава стойност, по-малка или равна на $c1$, т.е $y.b1 \leq c1$. Установяваме, че y може да е най-много 19, тъй като $5*20=100$.

Тогава ограниченията са в интервала от 0 до $c1 = c/5$, т.е. `for (i=0; i<=c1/b1; i++)`.

Решение на задачата на езика C++.

```
#include <iostream>
using namespace std;
int NOD(int a, int b)
{
    while (a!=b)
    {
        if (a>b)
            a-=b;
        else b-=a;
    }
    return a;
}
int main ()
{
    longlong a = 1200, b=1500, c,d, br, a1, b1, c1,i;
    cin>>c;
```

```

d = NOD (a, b);
a1 = a/d;
b1 = b/d;
if (c%d == 0)
{
    c1 = c/d;
    for(i=0; i<=c1/b1; i++)
        {
            if((c1-i*a1)%b1==0)
            {
                cout<<a1<<"*"<<i<< "+"<<b1<<"*"<<(c1-i*a1)/b1<<endl;
            }
        }
}
else
cout<<"uravnenieto nqma reshenie v mnojestvoto na estestvenite chisla"<<endl;
return 0;
}

```

Да проверим верността на решението с още един примерен вход. Нека $= 96300$.

Програмата извежда:

```

4*4+5*61
4*9+5*57
4*14+5*53
4*19+5*49
4*24+5*45
4*29+5*41
4*34+5*37
4*39+5*33
4*44+5*29
4*49+5*25
4*54+5*21
4*59+5*17
4*64+5*13

```

Това са всички възможни решения на уравнението $1200x + 1500y = 96300$.

Заклучение. Темата допълва знанията на учениците от 4.-5. клас за делимост (намиране на делителите на дадено число, прости числа, намиране на простите делители на дадено число, разбиване на число на прости множители, алгоритъм на Евклид, намиране на най-малко общо кратно). Учениците придобиват знания и умения за решаване на диофантови уравнения, които са известни в математиката и реално съществуват като тип състезателни задачи по информатиката за състезателните групи Д и Е.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] П. РАНГЕЛОВА, К. БЕКРИЕВ, Л. ДИЛКИНА, Н. ИВАНОВА. Учебно помагало за свободноизбираема подготовка по математика 5. клас, Пловдив, Летера, 1998.
- [2] А. РАХНЕВ, К. ГЪРОВ, О. ГАВРАИЛОВ. Бейсик в задачи, София, АСИО, 1995.
- [3] <http://www.math.bas.bg/infos/files/6-7-8-9-10.pdf>
- [4] http://www.math.bas.bg/infos/files/2009-11-10-u4ebnaprograma-5k1_competitions_v1.pdf

Коста Андреев Гъров
бул. „Шести септември“ 220
4000 Пловдив
e-mail: kosgar@uni-plovdiv.bg

Цветана Костадинова Димитрова
ул. „Чемшир“ 11
4000 Пловдив
e-mail: tsetsi.dimitrova.2010@gmail.com

INTEGRATING KNOWLEDGE AND SKILLS IN MATHEMATICS AND INFORMATICS BY CREATING COMPUTER PROGRAMMES WHICH SOLVE DIOPHANTINE EQUATIONS

Kosta Garov, Tsvetana Dimitrova

The present work is dedicated to the description of an approach intended to integrate knowledge and skill in Mathematics and Informatics by creating computer programmes solving Diophantine equations by students in the 4th–5th grade in Bulgarian schools. The topic at hand is familiar – Diophantine equations of first-degree with 2 variables. Such problems are solved by 10 to 11 year-old students in different workshops and extracurriculum classes in Mathematics by using certain properties of divisibility or the method of brute-force. This topic also ignites the interest in students who participate in workshops and special classes in informatics and attend national competitions and tournaments in competitive group E (4th–5th grade). With the help of computer programmes in C++ we can find all solutions of a given Diophantine equation or determine whether there aren't any in the set of natural numbers and zero. In order to write the programmes, competitors in Informatics need to acquire mathematical knowledge about divisibility of natural numbers and to know algorithms for finding GCD (Greatest common divisor), LCM (Least common multiple) and others. This work is designated for teachers in Informatics and Information technology (IT).