

СПИРАЛОВИДНИЯ ПОДХОД  
ПРИ ИЗУЧАВАНЕ НА ПОНЯТИЕТО  
“ПРОИЗВОДНА НА ФУНКЦИЯ В ТОЧКА“

Виктория Събева, Бисерка Йовчева

В памет на професор доктор Антон Моллов

Статията представя едно приложение на спираловидния подход в обучението по математика и по-специално при изучаването на „производна на функция в точка“ в средната и висша образователна степен. Понятието се дефинира в задължително-избираемата подготовка по математика в 12 клас и се надгражда при изучаване на математическите дисциплини във висшите учебни заведения. Изготвена е програма на базата на спираловидния подход, която показва как понятието се дефинира и прилага многократно, като всеки път познанията на обучаемите се разширяват и обогатяват. Описаната методика е приложена в занятията на кандидатстудентски курс, курс за новоприети студенти, както и при изучаване на дисциплината „Математически анализ I част“ във ВВМУ „Никола Й. Вапцаров“.

**1. Основни идеи и принципи на спираловидния подход.** Приложението на спираловидния подход към обучението по програмиране на 10–11 годишни ученици в извънкласни и извънучилищни форми е представено от д-р Бисерка Йовчева и проф. д-р Антон Моллов на различни форуми – [2], [3], [4], [5], [6], [7].

Описанието на основните стъпки се базира на дефиницията на математическото понятие „спирала“ – непрекъснатата равнинна крива, описана от точка, която се плъзга по лъч, въртящ се с постоянна скорост около координатното начало на фиксирана координатна система в равнината. Тя дава нагледен и съдържателен модел за съвкупност от похвати, начини и средства за преподаване.

В [1] се приема, че:

– всяка *спирала*, като цяло, символизира обучението по определена тема, учебно ядро или учебна дисциплина;

– кое да е *фиксирано положение на въртящия се лъч* символизира развитието на определено знание, умение, компетенция или система от знания, умения и (или) компетенции;

– *пресечните точки на лъчите със спиралата* символизират конкретен етап в усвояване на едно знание, умение, компетенция или система от компетенции;

– *полюсът на спиралата* (центърът на координатната система) се свързва с началото на обучението по темата, модула, учебното ядро или учебната дисциплина, които спиралата символизира;

– **всеки цикъл**, получен (описан от точката) при едно пълно завъртане на кой да е от лъчите, символизира обучението между две нива в изучаването на едно и също знание, умение или компетенция. (Терминът „цикъл“ се използва в същия смисъл от проф. Иван Ганчев в [8].)

Както знаем, Архимедова спирала се получава, когато ъгловата скорост на въртящия се лъч е постоянна. При променлива ъглова скорост на лъча се получават пресечни точки със спиралата, които не са на равни разстояния една от друга. В разглеждания модел се използва Архимедова спирала не като геометричен, а като топологичен обект, върху който се разполагат детайлите на това изследване.

В предлаганата разработка цитираните понятия и термини се интерпретират по следния начин:

– **Спиралата** съответства на обучение на ученици и студенти, изучаващи математически анализ;

– Всеки елемент на изследването (производна на функция в точка, приложения на първа производна и производна от по-висок ред, математически модели с приложения на производни) се представя с **лъч**.

– Последователните нива съответстват на запознаване с отделни приложения на производна на функция в точка.

## **2. Организация и реализация на спираловидния подход към обучението по математика.**

**2.1. Описание на лъчите.** Подходящо е като „начален“ лъч да се разгледа дефинирането на понятието „производна на функция в точка“, както и да се изведат производните на изучаваните в средното училище основни елементарни функции (степенна и тригонометрични функции). С приложението им да се усъвършенства техниката на диференциране на изградени от тях елементарни функции. Тези знания следва да се надградят във висшата степен на образование чрез дефинирането на нови основни елементарни функции (експоненциална, логаритмична, обратни кръгови и хиперболични) и извеждането на техните производни. Трябва също да се поставят основите на математически дисциплини, изучавани по-нататък.

В следващия лъч са описани приложения на разглежданото понятие, свързани с изследването на функции и скицирането на графиките им, като учениците от профилирани гимназии трябва да се научат да построяват графики на полиноми и дробно-рационални функции, а в по-високите нива на обучение да се изследва произволна елементарна функция.

Третият лъч „Математически модели с приложения на производни“ има за цел да даде стабилна основа за самостоятелно конструиране на математически модели и решаването на съответните задачи. Тук е важно да се изгради междупредметната връзка между математическия анализ и останалите общотехнически дисциплини.

**2.2. Описание на нивата в спиралата.** Първите две нива са съобразени с изискванията на МОН за учебната програма по математика – второ равнище – в рамките на задължително-избираема подготовка (с профилиращ предмет математика), както и със специализирана подготовка за кандидатстване във ВУЗ. Трето и четвърто ниво съответстват на общообразователната подготовка на студенти от инженерни специалности във висшите учебни заведения.

– **I ниво. Дефиниране на понятието „производна на функция в точка“. Правила за диференциране и техника на диференциране. Някои при-**

### *ложения на производна на функцията в точка*

На това ниво учениците от профилирани гимназии се запознават с понятието „производна на функция в точка“ и неговото геометрично тълкуване. Необходимите им знания са:

- » представа за изграждане на елементарна функция от основни елементарни функции чрез алгебрични действия (сбор, разлика, произведение и частно) върху функции;
- » добра техника за тъждествени преобразувания на рационални и тригонометрични изрази;
- » умения за пресмятане на граници чрез основните теореми, техните обобщения и някои основни граници;
- » умение за определяне на непрекъснатост на функция в точка и в интервал.

В това ниво учениците трябва да се запознаят с дефиницията на понятието „производна на функция в точка“ и да се научат да я прилагат за намиране на производните на някои основни елементарни функции (степенна и тригонометрични), да научат връзката между непрекъснатост и диференцируемост и да осмислят разликата между дефиниционно множество и област на диференцируемост. Съществен етап е да се научат да прилагат правилата за диференциране за намиране на производни на елементарни функции, изградени чрез алгебрични действия.

В същото ниво е предвидено и изучаването на производни от по-висок ред и приложенията им за намиране на екстремални и инфлексни точки на полиноми и дробно-рационални функции.

Крайната цел на нивото е учениците да могат да прилагат новите знания в конкретни математически и физични модели, като за целта следва да се разгледат конкретни примери с приложения на производни. Например, подходящи са задачи за намиране на уравнението на тангента към графика на функция в дадена точка, за намиране на точка, в която тангентата е под определен ъгъл спрямо абсцисната ос, както и задачи за движение по даден закон.

### **– II ниво. ЗИП и специализирана подготовка за кандидатстване във ВУЗ**

Нивото има за цел да подготви учениците за кандидатстване във ВУЗ и се базира на съдържанието в задължително-избираемата подготовка в училищния курс по математика.

За да се пристъпи към обучение по това ниво, обучаемите трябва добре да са усвоили намирането на производни на функции, получени чрез алгебрични действия от степенната и тригонометричните функции. Също така да умеят да установяват наличието на сложни функции, да конструират сложни функции по дадени външна и вътрешна функция и да намират дефиниционното им множество. Крайната цел е да усвоят намирането на производна и област на диференцируемост на дадена елементарна функция.

В нивото учениците трябва да се научат да определят интервали на монотонност, екстремални точки, интервали на изпъкналост и вдлъбнатост и инфлексни точки, както и да построяват графиките на полиноми и дробно-рационални функции.

Всички тези знания трябва се прилагат в задачи, в които учениците сами да конструират модела и да решат съответните математически проблеми. Подходящи са

задачи за намиране на екстремални стойности на геометрични мерки, както и задачи, в които се търси връзката между две (или повече) функции и техните графики.

– **III ниво. *Общобразователна подготовка на студенти от инженерни специалности***

В това ниво отново се въвежда дефиницията на „производна на функция в точка“, като се извеждат производните на нови основни елементарни функции. Целесъобразно е първо да се изведе производната на логаритмичната функция, като се използва границата  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ . След дефиниране на понятието „обратна функция“ могат да се изведат производните на експоненциалната функция и на обратните кръгови функции. Също така тук могат да се дефинират хиперболичните функции и да се изведат производните им, използвайки знанията от второ ниво за намиране на производна на сложна функция.

В същото ниво се показва еквивалентността на свойството „диференцируемост на функция в точка“ и представянето на нарастването на функцията в същата точка като сума от две безкрайно малки величини, едната от които е от по-висок порядък спрямо нарастването на аргумента. Оттук естествено се дефинира понятието „диференциал на функция“ и приложението му за линейна апроксимация на нарастването на функцията.

Като илюстрация на свойството „диференцируемост на функция в интервал“ се доказват теоремите на Рол, Коши и Лагранж, а като техни следствия се извежда формулата на Тейлър с възможността за нелинейна апроксимация на нарастването на функцията.

Друго следствие на теоремите за средните стойности е правилото на Лопитал за разкриване на неопределени форми от всички видове, включително и за неелементарна функция.

Подходящо е тук отново да се решават задачи за намиране на интервали на монотонност, екстремални точки, интервали на изпъкналост и вдлъбнатост, инфлексни точки, както и за намиране на асимптоти, но този път знанията да се прилагат за произволни елементарни функции.

– **IV ниво. *Общотехническа подготовка във висшето училище***

Естествената първа цел на нивото е да се приложат всички натрупани знания върху приложения на производни от първи и от по-висок ред за построяването на графиката на произволна елементарна функция.

В това ниво още се показват: техниката на диференциране чрез предварително логаритмуване, въвежда се понятието „частна производна“ от първи и от по-висок ред за функция на две и повече променливи, извеждат се правилата за диференциране на съставна функция и на функция, зададена неявно. По този начин се изгражда основата за изучаване на следващите, необходими за бъдещи инженери, раздели на математиката, като: интегрално смятане за функция на една и повече променливи, диференциални уравнения, векторен анализ, диференциална геометрия и други.

Също така студентите трябва да се научат да прилагат всички натрупани знания за цялостното конструиране на математически модели, свързани с приложения на производните във физиката, механиката, икономиката.

**2.3. Учебна програма, реализираща основните идеи на спираловидния подход в обучението по математически анализ.** Приложената Таблица 1 по-  
356

Таблица 1

Лъчи	I ниво		II ниво		III ниво		IV ниво	
	Тема	Брой часове	Тема	Брой часове	Тема	Брой часове	Тема	Брой часове
Производна на функция в точка	1.1 Дефиниция и геометричен смисъл на производна на функция в точка	2	2.1 Намиране на производна на функция от функция	2	3.1 Намиране на производна на функция чрез дефиницията. Производна на логаритмична функция	2	4.1 Логаритмични производни (диференциране чрез предварително логаритмуване)	2
	1.2 Връзка между непрекъснатост и диференцируемост	1			3.2 Производна на функция, зададена параметрично	2	4.2 Производни на съставни функции и на функции зададени в неявен вид	2
	1.3 Производни на степенна функция и тригонометрични функции, правила за диференциране	3			3.3 Намиране на производни на обратни функции. Производни на показателна и обратни кръгови функции	2		
					3.4 Производни на сложни функции. Производни на хиперболични функции	2		

Таблица 1 (продължение)

Лъчи	I ниво		II ниво		III ниво		IV ниво		Брой часове
	Тема	Брой часове	Тема	Брой часове	Тема	Брой часове	Тема	Брой часове	
<b>Приложения на производни от първи и по-висок ред</b>	1.4 Намиране на производни от по-висок ред	2	2.2 Определяне на интервали на монотонност и екстремални точки	2	3.5 Диференциал на функция и приложения	2	4.4 Построяване на графики на произволни функции.	4	
	1.5 Определяне на екстремални точки	1	2.3 Определяне на най-голяма и най-малка стойност на функция в интервал	1	3.6 Теорема за средните стойности	2			
	1.6 Определяне на инфлексни точки	1	2.4 Определяне на интервали на изпъкналост, вдлъбнатост и инфлексни точки	1	3.7 Формула на Тейлър	2			
<b>Математически модели с приложения на производни</b>	1.7 Намиране на уравнение на тангента в дадена точка	1	2.5 Построяване на графики на полиноми и дробно-рационални функции	3	3.8 Правило на Лопитал за разкриване на неопределени форми	2			
	1.8 Положение на тангента към крива спрямо абсцисната ос	1	2.6 Задачи за намиране на екстремални стойности на геометрични мерки	1	3.9 Метод на най-малките квадрати	2	4.5 Конструирание на математически модели и решаване на конкретна задача	4	
	1.9 Задачи за движение по даден закон	1	2.7 Връзка между две функции и техните графики	1					

казва програма, създадена на базата на описания подход за надграждане на знанията върху прилагането на производна на функция в точка. Програмата по I и II ниво е съобразена с изискванията на МОН за учебната програма по математика в 12 клас за задължително-избираема подготовка. Програмата по нива III и IV е прилагана като част от дисциплината „Математически анализ – I част“ за инженерни специалности във ВВМУ „Никола Й. Вапцаров“ през учебните 2011/12, 2012/13 и 2013/14 г.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Б. ЙОВЧЕВА. Спираловиден подход в обучението по програмиране на 10–11 годишни деца. Дисертация за присъждане на образователна и научна степен „доктор“, Шуменски Университет „Епископ Константин Преславски“.
- [2] Б. ЙОВЧЕВА., Един опит за реализация на началното обучение по програмиране на 10–11 годишни ученици на базата на спираловиден подход към обучението. *Математика и математическо образование*, 38 (2009), 289–295.
- [3] Б. ЙОВЧЕВА, И. ИВАНОВА. Първи стъпки в програмирането на C/C++, Издателство КЛМН, София, 2006.
- [4] Б. ЙОВЧЕВА. Спираловидно обучение по програмиране на 10–11 годишни деца (на базата на езика C++). *Математика и математическо образование*, 36 (2007), 369–375.
- [5] Б. ЙОВЧЕВА, А. МОЛЛОВ. Идея за реализация на спираловидния подход в началното обучение по програмиране. IV Балкански конгрес, 22–24 юни 2007, Стара Загора, „Образованието, Балканите, Европа“.
- [6] B. YOVCHNEVA. Spiral Teaching of Programming to 10–11 Year-Old Pupils After Passed First Training (Based on The Language C++), 3rd International Conference “ISSEP Informatics in Secondary Schools Evolution and Perspectives, Informatics Education – Contributing Across the Curriculum”, 1–4 July, 2008, Torun, Poland.
- [7] Б. ЙОВЧЕВА, А. МОЛЛОВ, П. ПЕТРОВ. Спираловиден подход към обучението по темата „теория на числата“ в курса по програмиране за 10–11 годишни деца, Научно-практическата конференция на тема „Предизвикателствата на съвременното и качеството на образованието“ – Шумен, 30 – 31.10.2008.
- [8] И. ГАНЧЕВ и др. Организация и методика на урока по математика. Просвета, София, 1987.

Виктория Петрова Събева  
Катедра “Математика и физика”  
Инженерен Факултет  
Висше Военноморско Училище  
„Никола Йонков Вапцаров“  
ул. „Васил Друмев“ 73  
Варна, България  
e-mail: viktoriya\_sabeva@yahoo.com

Бисерка Бончева Йовчева  
Катедра “Компютърна Информатика”  
Факултет по математика и информатика  
Шуменски Университет  
“Епископ Константин Преславски”  
ул. „Университетска“ 115  
Шумен, , България  
e-mail: bissy\_y@yahoo.com

**AN EXAMPLE OF THE USE OF THE SPIRAL APPROACH  
IN STUDYING THE CONCEPT OF “DERIVATIVE OF A FUNCTION  
AT A POINT” IN HIGH SCHOOL AND UNIVERSITY EDUCATION**

**Viktoriya Sabeva, Biserka Yovcheva**

The article presents the usage of the spiral approach in teaching mathematics and, in particular, the concept of a “derivative of a function at a point”. The concept is defined in the 12th grade – II level in studying mathematics and is developed in the math courses studied at technical universities. A program has been prepared based on the spiral approach. It shows several times how the concept is defined but each time the knowledge is upgraded. The described method is used in a math course for future university students, a math course for newly accepted students, and also in the discipline “Mathematical analysis – part I”, all in the Naval Academy “Nikola Vaptsarov” – Varna.

**Key words:** education, mathematics, spiral approach, derivatives