МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2016
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2016
Proceedings of the Forty Fifth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Pleven, April 6–10, 2016

РИМАН – ЖИВОТ И ТВОРЧЕСТВО (1826–1866)*

Величка Милушева

През 2016 година се навършват 190 години от рождението и 150 години от смъртта на великия математик Георг Фридрих Бернхард Риман (нем. Georg Friedrich Bernhard Riemann), който има огромен принос за развитието на съвременната математика. Неговите забележителни научни резултати са в много области – комплексен и реален анализ, геометрия, математическа и теоретична физика, диференциални уравнения, теория на числата. В известен смисъл Риман полага основите на общата теория на относителността. Трудно може да се направи кратък обзор на неговото научно творчество, затова отбелязваме само някои от основните му научни приноси и моменти от краткия му живот.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1863)

*Авторът е частично финансиран от ФНИ по договор ДФНИ-И 02/14.

1. Биографични данни. Георг Фридрих Бернхард Риман е роден на 17 септември 1826 г. в Брезеленц, кралство Ханоаер (днешна Германия). Неговият баща, Фридрих Бернхард Риман, бил беден лутерански свещеник, участвал в Наполеоновите война. Бернхард е второто от общо 6 деца – 2 момчета и 4 момичета. Майка му, Шарлоте Ебел, почива рано от туберкулоза, от същата болест почиват и две от сестрите му, а по късно и самият Риман. До десетгодишна възраст Риман е обучаван от баща си с помощта на учител от местното училище. През 1840 г. отива да учи в лицея в Хановер като живее при баба си, но през 1842 г. баба му умира и той се премества в гимназията в Люнебург. Риман бил скромен и срамежлив, изпитвал ужас от говорене пред хора, не обичал да привлича внимание върху себе си. Той старателно изучавал Библията, тъй като от него се очаквало да стане свещеник като баща си, но проявявал изключително силен интерес към математиката. Учителите му били учудени от способността му да извършва бързо сложни математически пресмятания. Директорът на гимназията (Mr. Schmalfuss) му давал да чете математически книги от своята собствена библиотека. Твърди се, че Бернхард прочел и усвоил за 6 дни книга на Льожандър върху теория на числата, която била 900 страници (вероятно става въпрос за книгата Adrien-Marie Legendre, *Théorie des nombres*, vol. 2 (1830)).

През 1846 г. Риман се записва в Гьотингенския университет, където по препоръка на баща си учи теология и филология в Теологическия факултет. В университета, обаче, посещава няколко лекции на великия Карл Фридрих Гаус, който по това време е професор в Гьотингенския университет. Повлиян от лекциите на Гаус, Риман иска разрешение от баща си да се прехвърли във Факултета по философия, където да изучава математика. Трябва да отбележим, че Риман винаги се е съобразявал с желанията на семейството си и не предприема никакви важни стъпки без разрешението на баща си. В крайна сметка, получава съгласието му и започва да посещава курсовете по математика на Мориц Щерн и Карл Фридрих Гаус.

По това време, обаче, преподаването на физика и математика в Гьотинген не е на много високо ниво, дори и при наличието на такъв математик като Гаус, тъй като той четял лекции само по елементарна математика. Като че ли в тези години Гаус все още не е забелязал гениалните способности на Риман. Но Щерн е считал Риман за забележителен свой ученик.

През пролетта на 1847 г. Риман се премества от Гьотинген в университета в Берлин, където посещава лекциите на Дирихле, Якоби, Щайнер и Айзенщайн. Тези лекции, както и запознаването му с Дирихле и Айзенщайн, оказват много голямо влияние върху развитието и израстването на Риман като математик, тъй като по време на престоя му в Берлин той се запознава със съвременното (за онова време) състояние на математическия анализ, аналитичната механика, математическата физика, теорията на числата. Творческата атмосфера във Философския факултет на Берлинския университет, където са се изучавали физико-математическите науки, и беседите с изтъкнатите математици там спомогнали за бързото израстване на математичекия гений Риман. В този период съзряват основните идеи на неговата теория на функциите на комплексни променливи, както и философския му мироглед. Трябва да отбележим, че интересът на Риман към физико-математическите науки винаги се е съчетавал с интереса му към философията, по-специално към натурфилософията (създаването на цялостна физико-математическа картина на света).

През пролетта на 1849 г. Риман се връща в Гьотинген, където научният климат е силно подобрен поради завръщането на известния физик Вилхелм Едуард Вебер. Следват три семестъра, през които Риман слуша лекции по физика и философия и участва активно във физико-математическия семинар, ръководен от Вебер, Листинг и Щерн. Контактите му с Вебер и Листинг разширяват значително познанията му по теоретична физика. В продължение на 18 месеца Риман е асистент на Вебер.

Риман, подобно на Гаус и Нютон, възприемал своите занимания с математика не като самоцел, а като могъщо средство за опознаване на света. През ноември 1850 г. пред педагогическия семинар в Гьотинген 24-годишният Риман изнася лекция, озаглавена „*Относно обема, подредбата и методите на преподаване на естествените науки в гимназиите*“, в която говори за „възможностите за построяване на напълно завършена математическа теория, която, изхождайки от елементарните закони за взаимодействието на отделните точки, би обхванала всички процеси, случващи се в обкръжаващото ни физическо непрекъснато пространство – независимо от това, дали става дума за притегляне, електричество, магнетизъм или за топлообмен“ [1]. Идеята на Риман е била да се създаде единна теория, която да обяснява математически всички физични процеси.

През декември 1851 г. Риман защитава дисертация под ръководството на Гаус, озаглавена „*Основи на общата теория на функциите на една комплексна променлива*“ (*Grundlagen für eine allegemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*), в която за пръв път се въвежда понятието, известно днес като *Риманова повърхнина.*

През следващите две години и половина той работи върху т.н. *Habilitationsschrift* (хабилитационен труд, който му дава право да изнася лекции, т.е. да стане т.н. „Privatdocent“), свързан с представяне на функции чрез тригонометрични редове (*Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reine*). За да приключи процедурата по хабилитиране, той трябва да изнесе и една пробационна встъпителна лекция. Практиката е била кандидатът да предложи три заглавия, от които ръководителят на факултета обикновено избирал първото. Риман подготвил три теми, от които първите две били свързани с електродинамиката, а третата – с основи на геометрията. Неочаквано за самия Риман, Гаус избира лекцията по геометрия, за която Риман бил най-малко подготвен. Самият Гаус се е интересувал от тази теория в продължение на много години и бил любопитен да види как такъв млад кандидат ще се справи с това голямо предизвикателство. В следващите два месеца Риман се откъсва от интересите и изследванията си върху връзката между електричество, магнетизъм, светлина и гравитация, и се отдава изцяло на подготовката за встъпителната лекция върху основи на геометрията.

На 10 юни 1854 г., във Философския факултет на университета в Гьотинген, Риман изнася своята лекция „*Върху хипотезите, лежащи в основата на геометрията*“ (*Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*), която се счита за един от най-великите шедьоври в математиката. Лекцията е публикувана едва в 1868 г. (две години след смъртта му). Идеите, изложени от Риман в нея, са с огромна значимост за развитието на диференциалната геометрия и за разработването по-късно на Айнщайновата теория на относителността. Дори Гаус бил изненадан и много развълнуван. Дедекинд описва реакцията на Гаус по следния начин: „Гаус слушаше лекцията, която надмина всичките му очаквания, с най-голямо удивление и след сбирката във факултета, с нетипично за него вълнение, говореше на Вебер за дълбочината на идеите, представени от Риман.“[1] Всъщност, единствено Гаус от присъстващите на лекцията е могъл да разбере дълбочината на идеите на Риман. Едва след около 60 години неговата лекция става основа на разработената от Айнщайн Обща теория на относителността.

Първите лекции, които Риман чете като „Privatdozent“ са по частни диференциални уравнения и приложенията им във физиката. През 1855—1856 той чете курс по теория на абеловите функции, който се посещава от 3 слушатели – Дедекинд, Биеркнес и Шеринг. През 1866 г. Гаус почива и мястото му заема Дирихле. Риман прави опити да стане извънреден професор, но тези опити не успяват. Все пак Дирихле му помага да получи нещо като държавна стипендия от 200 талера на година, което е около 1/10 от заплатата на професор. През 1857 г. Риман става извънреден професор със заплата от 300 талера на година, а след смъртта на Дирихле през 1859 г. става професор. Скоро след това е избран за член на Берлинската академия на науките по предложение на трима берлински математици – Кумер, Борхардт и Вайерщрас, а също така и за член на Френската академия на науките и на Лондонското кралско общество (Royal Society of London).

На 3 юни 1862 г. Риман се жени за Елиза Кох, от която има дъщеря Ида. За нещастие, много скоро след сватбата той се разболява от туберколоза, която найвероятно се е таила в него отдавна. Въпреки временните подобрения, последните 4 години от живота му преминават в постоянно боледуване. Риман се опитва да се пребори с болестта като по препоръка на лекарите прекарва доста време в Италия на по-топъл климат. Зимата на 1862–1863 прекарва в Сицилия. През пролетта на 1863 пътува из Италия и се среща с италиански математици, един от които е Бети, с когото се познават от Гьотинген. През юни 1863 се връща в Гьотинген, но скоро здравословното му състояние се влошава и той отново се връща в Италия. От август 1864 до октомври 1865 живее в северна Италия, а зимата на 1865–1866 прекарва в Гьотинген. През юни 1866 прави последното си пътуване до Италия като на 16 юни пристига на брега на езерото Лаго-Маджоре, Селаска, където умира в пълно съзнание на 20 юли 1866, ненавършил 40 години. Погребан е в гробището на Биганзоло, Италия.

Скоро след смъртта му прислужничка разчиства дома му в Гьотинген, при което изхвърля и част от неиздадените научни трудове на Риман. Така част от научното наследство на великия Риман никога не достига до нас.

Всъщност, хабилитационният му труд е издаден от Дедекинд през 1868 г. [7]. Сборник с трудовете на Риман е подготвен и издаден от неговите приятели Р. Дедекинд и Х. Вебер през 1876 г. [11]. В този сборник е включена и биографията на Риман, написана от Дедекинд. На бял свят излизат и лекциите му „Partielle Differentialgleichungen der Physik“ (под редакцията на Хатендорф, 1869), „Schwere, Elektrizität und Magnetismus“ (под редакцията на Хатендорф, 1875) и „Elliptische Funktionen“ (под редакцията на Щал, 1899).

[1] цитатът е от биографията на Риман, написана от Р. Дедекинд „*Bernhard Riemann's Lebenslauf*“ и включена в [11], превод на английски в [9].

Надгробната плоча на Риман

2. Научни приноси. През краткия си живот Риман публикува малко статии, но всяка от тях съдържа изключително големи резултати и е сериозен принос в развитието на различни области от математиката – алгебрична теория на функциите, комплексен анализ, диференциална геометрия, топология, теория на числата, математическа физика. Може да се твърди, че неговите работи са революционни за времето си, защото променят завинаги начина, по който учените са възприемали математиката и физиката. Тук ще споменем само някои от най-значимите му работи.

2.1. Комплексен и реален анализ. Първата публикувана работа на Риман е дисертацията му от 1851 г. върху теорията на функциите на една комплексна променлива, с която поставя основите на геометрично направление в теорията на аналитичните функции. Докато предходниците му са разглеждали аналитична функция като еднозначна функция на комплексна променлива, която е диференцируема в някаква област (дефиниция на Коши) или като сума на степенен ред, сходящ във вътрешността на някаква област (дефиниция на Вайерщрас), Риман подхожда по друг, по-скоро геометричен начин, изхождайки от задачи и методи в математическата физика. Той дефинира аналитична функция на комплексна променлива $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в някаква област от стойности на аргумента $z = x + iy$ като функция, на която реалната и имагинерната част удовлетворяват условията

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1}$$

наречени по-късно уравнения на Коши-Риман. Тези уравнения са били известни още от XVIII век в трудове ва Ойлер и Даламбер по хидродинамика и по-късно на Коши (като условия за конформно изображение между области в равнините z и w), но Риман ги използва като изходна точка при разработване на своята теория на аналитичните функции. Условията (1) означават, че функциите u и v са хармонични, т.е. удовлетворяват двумерното уравнение на Лаплас

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0,$$

което играе важна роля в много задачи от математическата физика. Още преди Риман са били известни методи за решаване на уравнението на Лаплас при едни или други гранични условия. Пренасяйки творчески идеите от математическата физика в теорията на функциите, Риман разглежда въпроса за определяне на аналитична функция чрез различни гранични условия. Например, в случай на крайна област, ограничена от единствена затворена крива, аналитичната функция $w = u + iv$ се определя чрез задаване стойностите на u по контура на разглежданата област и стойността на v в една вътрешна точка от областта.

В дисертацията си Риман въвежда топологични методи в теорията на аналитичните функции като разглежда функции с особени точки, зададени в многосвързани области и въвежда понятието многолистни повърхнини (известни днес като *Риманови повърхнини*). С цел класифициране на компактните такива повърхнини, Риман въвежда число (наречено по-късно род на повърхнината), което се определя от броя на разрезите, с помощта на които многосвързана повърхнина може да се превърне в едносвързана. Това е една от първите съществени употреби на топологични методи в математиката. Геометричният подход и въвеждането на топологични методи в теорията на функциите на комплескни променливи най-вероятно е повлияно от дискусиите на Риман с Листинг по време на семинара по математическа физика, който той редовно посещава.

Легендарният 75-годишен Гаус, който много рядко проявявал ентусиазъм относно резултати на съвременници, в официалната си рецензия до Философския факултет на Гьотингенския университет пише за дисертацията на 25-годишния Риман следното: „Представената от г-н Риман дисертация убедително свидетелства за дълбочина и широта на изследванията, за творческо, активно, истинско математическо мислене и за изключително плодотворна оригиналност. Изложението е ясно, сбито и на места прекрасно... Като цяло това е важна и значима работа, която не само удовлятворява стандартните изисквания за докторска дисертация, но и значително ги надхвърля“ (превод от [2] и [3]).

В следващи трудове Риман прави приложение на общата теория и разработените от него методи при изучаването на хипергеометрични редове, в теорията на абеловите функции, и редица други въпроси, които са публикувани през 1857 г. Дисертацията на Риман и трудовете му от 1857 г. поставят основите на две интензивно развиващи се области на съвременната математика – топологията и алгебричната геометрия.

За тема на хабилитационния труд Риман избира теория на тригонометричните редове. Проблемът за разлагане на функция в тригонометричен ред е поставен от Бернули един век по-рано във връзка с решаване на задачата за малки колебания на струната, но не е бил решен. Първото добре обосновано достатъчно условие за разлагане на произволна функция на реална променлива в тригонометричен ред е дадено от Дирихле в статии от 1829 – 1837, а условие от друг вид е публикувано от Лобачевски в статии от 1834 – 1835 на руски език, които не получават широка известност по това време. Риман решава да продължи изследванията на Дирихле, с когото се познава от Берлин. През есента на 1852 г. Дирихле посещава Гьотинген и Риман споделя с него някои от идеите си. Изследвайки разложимостта на функция в тригонометричен ред, Риман въвежда класическото понятие интеграл (известно днес като *Риманов интеграл*) и определя необходимите и достатъчни условия за интегруемост (в смисъл на Риман), което е от голямо значение за теорията на множествата и функциите на реални променливи.

Риман е един от първите учени, които изучават диференциални уравнения включващи комплексни променливи. Той въвежда нови методи в изследването на частни диференциални уравнения и ги прилага при изучаването на ударни вълни (shock waves). Един от важните приноси на Риман в математическата физика е негова статия от 1860 г. върху динамика на газа, в която изучава звукови вълни (sound waves). Тази статия дава началото на общата теория на хиперболичните частни диференциални уравнения.

2.2. Риманова геометрия. Със своята легендарна лекция „*Върху хипотезите, лежащи в основата на геометрията*“, изнесена на 10 юни 1854 г., Риман предизвиква фурор в света на математиката. Теорията, изложена в тази лекция, се счита за едно от най-великите достижения в геометрията и полага началото на нова област в математиката – Риманова геометрия.

В първата част от лекцията Риман разглежда геометрията в широк смисъл като учение за пространство от точки (наречено днес многообразие) и начин за измерване на разстояние между две точки по крива в това пространство. Той разглежда пространство с произволна размерност n, като дори допуска мисълта за безкрайномерно многообразие. Общата идея на Риман за понятието „*n-мерно многообразие*“ е следната: множество от произволни еднородни обекти, служещи за „точки“, като на всеки обект се съпоставя наредена n-торка от числа $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Две такива n-торки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ определят един и същ обект на многообразието точно когато съответните числа в тях са равни, т.е. $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$. Метриката се задава с произволна положително определена квадратична форма

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} dx_i dx_k,$$

където g_{ik} са функции на $x_1, x_2, \dots, x_n$. Пространство с въведена по такава формула метрика се нарича *Риманово пространство.* Многообразия, за които линейният елемент ds може да се доведе до вида $ds^2 = \sum_{i=1}^{n}(dx_i)^2$ са специален клас многообразия, които Риман нарича плоски и изучава по-подробно. Разглеждайки въпроса кога една метрика от общ вид $\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}dx_i dx_k$ може да се трансформира до $\sum_{i=1}^{n}(dx_i)^2$, Риман стига до понятието „кривина“, което в случай на n-мерно многообразие е система от $\frac{n(n-1)}{2}$ функции, представляващи т.н. *Риманов тензор на кривина.* Според Риман тези $\frac{n(n-1)}{2}$ функции напълно определят метриката. В случай на 2-мерно Риманово многообразие това понятие съвпада с въведеното от Гаус понятие кривина на повърхнина в 3-мерно пространство. Многообразията, за които кривината е нула (плоските многообразия) са частен случай на многообразия, за които кривината във всяка точка е една и съща. Риман показва, че многообразията с постоянна кривина се характеризиарат с едно общо свойство, а именно: фигурите върху многообразието могат да се преместват от точка в точка без да се променят формата и размерите им. Сред пространствата с постоянна кривина k се разграничават следните случаи: 1) $k = 0$ – пространство с нулева кривина, в което намира място Евклидовата геометрия; 2) $k < 0$ – пространство с отрицателна кривина, в което се реализира хиперболичната геометрия на Лобачевски–Бояй; 3) $k > 0$ – пространство с положителна кривина, в което намира място т.н. елиптична геометрия.

Всъщност, първата неевклидова геометрия е разработена от Лобачевски (1829) и Бояй (1831). Има сведения, че още преди тях Гаус е стигнал до идеята за неевклидови геометрии, но не се е решил да даде гластност на своите мисли поради противоречието им с господстващите традиции от самото начало на съществуване на математиката като наука. Не е ясно дали Риман е знаел за трудовете на Лобачевски и Бояй, но той разработва своята теория по съвсем различен и оригинален начин, от нова и наистина универсална гледна точка, като достига много по-далеч. Със сигурност, обаче, Риман е знаел, че Гаус дълги години е обмислял идеята за по-обща дефиниция на понятието пространство, тъй като когато работи върху подготовката на лекцията, той пише в писмо до баща си следното: „Все повече се убеждавам, че Гаус е работил върху тази тематика в продължение на години и е споделил някои от своите идеи с най-близките си приятели (между които е Вебер). Надявам се, че за мен все още не е късно, и че ще получа признание като независим изследовател“ [3].

Във втората част на лекцията си Риман говори за същността и природата на реалното физическо пространството, в което живеем. Въпросът за „пространство“ е разгледан от съвсем универсална гледна точка, а връзките между физика и геометрия са представени по начин, който изпреварва развитието на науката с няколко десетилетия. Разсъжденията на Риман излизат извън пределите на математиката и с поразителна яснота (звучаща почти като пророчество) показват пътя, по който са направени изводите от неговата идея за пространство, на базата на които е разработена Айнщайновата теория на относителността. Лекцията на Риман завършва с пророческите думи: „Тук се намираме на прага на друга научна област – физиката, и поводът на днешното събитие не ни позволява да го прекрачим“ [1].

Трябва да отбележим, че отчитайки състава на аудиторията (лекцията е била пред членовете на Философския факултет), Риман почти не използва формули и излага всичките си идеи словесно. Диференциално-геометричния апарат за теорията на многообразията Риман развива (и то частично) много по-късно – в незавършената си работа по теория на топлопроводимостта (1861).

Встъпителната лекция на Риман е публикувана посмъртно през 1868 г. от Дедекинд, а споменатият ръкопис по теория на топлопроводимостта е публикуван в първото издание на съчиненията на Риман, издадено от Дедекинд и Вебер през 1876 г. Влиянието, което оказва публикуването на встъпителната лекция, наистина е било огромно. Идеите на Риман променят изцяло математическото, физическо и философско разбиране за понятието пространство. Теорията на Риман не само открива нови перспективи за развитието на математиката, но и дава основния математически апарат за разработване на Айнщайновата обща теория на относителността.

2.3. Теория на числата и хипотеза на Риман. През 1859 г. пред Берлинската академия на науките, по повод избирането му за член-кореспондент, 33-годишният Риман изнася лекция *„Върху броя на простите числа по-малки от дадена величина“* (*Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*), в която използва комплексни функции за решаване на задача от теорията на числата. Лекцията е публикувана в [6]. Риман разглежда въпроса за намиране на формула, даваща броя на простите числа по-малки от дадено фиксирано число – проблем, който дълги години е привличал вниманието на Льожандър, Гаус, Дирихле, Чебишов. Търсейки отговор на този проблем, Риман разглежда функцията

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

за комплексни стойности на s, която днес е известна като *„дзета-функция на Риман“*.

Връзката между задачата за разпределение на простите числа и дзета-функцията се основава на доказаното от Ойлер равенство

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^s}},$$

където p_n е n-тото просто число. Дзета-функцията е разглеждана от Ойлер, но за реални стойности на аргумента, по-точно за $s > 1$ (при $s \leq 1$ редът е разходящ). Риман е първият, който разглежда дзета-функцията за комплексни стойности на s и показва, че тя е аналитично продължима в цялата комплексна равнина като мероморфна функция с единствен (прост) полюс в точката $s = 1$. Той доказва, че точките $-2; -4; -6; \ldots$ са прости нули на продължената дзета-функция, наречени тривиални, и че други нули може да има само в ивицата $0 \leq \mathrm{Re}s \leq 1$. Риман установява редица нови свойства на дзета-функцията и изказва великата хипотеза, която гласи: *Всички нетривиални нули на $\zeta(s)$ имат реална част $\frac{1}{2}$*. Тази хипотеза на Риман нито е потвърдена нито е опровергана до днес. Обзор за дзета-функцията и хипотезата на Риман е направен в [8].

С помощта на дзета-функцията Риман получава редица нови оценки на функцията $\pi(x)$ – броя на простите числа по-малки или равни на x, а през 1896 г. французинът Адамар и белгиецът Валле-Пусен доказват независимо един от друг следния асимптотичен закон за разпределение на простите числа

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{Li\, x} = 1,$$

където $Li\,x$ е интегралният логаритъм, зададен с формулата $Li\,x = \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\ln t}$.

Големият принос на Риман се състои в това, че той показва как разпределението на простите числа се определя от нетривиалните нули на дзета-функцията. Формулата, която той дава за функцията $\pi(x)$, е следната

$$\pi(x) = Li\,x + \sum_{\rho\in\mathcal{N},\mathrm{Im}\rho>0} \big(Li\,(x^{\rho}) + Li\,(x^{1-\rho})\big) + \int_x^{\infty} \frac{dt}{(t^2-1)\ln t} - \ln 2,\ x \geq 2,$$

където $\mathcal{N}$ е множеството от нетривиалните нули на $\zeta(s)$ ([8]). Ако хипотезата на Риман е вярна и е зададено числото x, то чрез горната формула може да се определи колко прости числа има между 1 и x. Това е забележителен резултат, който определя хипотезата на Риман като един от най-важните отворени въпроси в теорията на простите числа.

Изследванията на Риман върху свойствата на дзета-функцията, разглеждана като функция в комплексната равнина, поставят началото на ново направление в теорията на числата – аналитична теория на числата.

Въпреки усилията на много големи математици, хипотезата на Риман все още не е доказана. Получени са частични резултати, един от които е резултат на Харди [5], доказал през 1914 г., че съществуват безкрайно много нетривиални нули на дзета-функцията, които имат реална част $\dfrac{1}{2}$.

Хипотезата на Риман е един от 23-те проблема, които Хилберт поставя като предизвикателства към математическата общност по време на втория математически конгрес, проведен в Париж 1900 г. Тя е и един от 7-те проблема на хилядолетието, обявени през 2000 г. от Математическия институт „Клей“ (САЩ), за решението на всеки от които институтът дава награда от 1 милион долара. Тази хипотеза от преди 157 години продължава да е огромно предизвикателство към математическата мисъл.

3. Заключение. Теория на аналитичните функции, елиптични и абелови функции, тригонометрични редове, многомерни риманови пространства, математическа физика, теория на числата, натурфилософия – това далеч не е пълният списък от научни направления, в които Риман има принос с непреходно значение. Идеите на Риман живеят в съвременната математика и физика и едва ли има друг учен от средата на XIX в., който да е оказал по-плодотворно влияние на развитието на математиката от този удивително разностранен гений, чието активно творчество трае само около 15 години.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Риман. Сочинения. Перевод с немецкого под редакцией, с предисловием, обзорной статьёй и примечаниями проф. В. Л. Гончарова. Москва, ГТТИ, 1948.

[2] А. Юшкевич, С. Демидов. Бернгард Риман. К 150-летию со дня рождения. *Математика в школе*, бр. 4 (1977), 76–80.

[3] E. Bell. Men of Mathematics, 2-nd edition, N.Y., 1953.

[4] Biography in Encyclopedia Britannica. `http://www.britannica.com/biography/Bernhard-Riemann`

[5] G. Hardy. Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **158** (1914), 1012–1014.
[6] B. Riemann. Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. *Monat. der Königl. Preuss. Akad. der Wissen. zu Berlin aus der Jahre.* 1859 (1860), 671-–680.
[7] B. Riemann. Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. Habilitationsschrift, 1854, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, **13** (1868).
[8] P. Rusev. Riemann's Hypothesis. *Math. and Education in Math.*, **39** (2010), 21–28.
[9] M. Spivak. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, vol. 2, Second Edition, Publish or Perish Inc., Houston, 1979.
[10] D. J. Struik. A Concise History of Mathematics. G. Bell and Sons Ltd., London, 1954.
[11] H. Weber, R. Dedekind. Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass, Leipzig: Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1876, 2nd ed. 1892.

Величка Милушева
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София, България
и
ВСУ „Л. Каравелов“
ул. Суходолска, № 175
1373 София, България
e-mail: vmil@math.bas.bg

RIEMANN – LIFE AND SCIENTIFIC WORK (1826–1866)

Velichka Milousheva

In 2016 we celebrate 190th anniversary of the birth and 150th anniversary of the death of the exceptional mathematician Georg Friedrich Bernhard Riemann, who has made an enormous contribution to the development of modern mathematics. He had remarkable results in many research areas such as complex and real analysis, geometry, mathematical and theoretical physics, differential equations, number theory. Riemann established the foundations of the theory of General Relativity. It is difficult to present briefly his scientific work, so only some of his main contributions and the basic moments of his short life are mentioned here.