МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2016
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2016
Proceedings of the Forty Fifth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Pleven, April 6–10, 2016

„ВЕЛИКОТО ИЗКУСТВО“ ИЛИ ЧУДЕСАТА НА XVI ВЕК

Иван Тонов

Частта от математиката, наречена алгебра, възниква в най-дълбока древност и според най-старите паметници, дошли до нас от египтяни, вавилонци и други цивилизации, съдим за началната ѝ поява. Тя възниква първоначално като теория на величините и продължава да еволюира до наши дни. Алгебрата ни е дала развитието на понятието число и идеята за моделиране на природни процеси чрез уравнения и неравенства.

В началото на XVI век алгебрата преживява ново развитие благодарение на откритието на математиците от италианската школа, а именно решението на уравненията от трета и четвърта степен. По тази причина много автори считат, че това откритие е олицетворение на великия етап от развитието на човечеството – Възраждането или Ренесанса. Какви са основанията да приемем техния довод? По това време европейските учени са се опитвали да осъзнаят какво е било направено от античните, индийските и арабските им предшественици. Първите истински постижения на математиците от XVI век се отнасят към алгебрата. В този период геометрията вече е била оформена като завършена наука. Първата книга, която може да считаме, че е посветена изцяло на алгебрата, написана в края на XV век и началото на XVI, е от Лука Пачоли, приятел на великия Леонардо Да Винчи, който обръща внимание на алгебричното решаване на кубични уравнения. В това съчинение се внушава идеята, че е невъзможно да се решат алгебрично кубичните уравнения.

Не случайно Италия, люлката на Ренесанса, е дала на човечеството според думите на Феликс Клайн това „Велико изкуство“ – алгебричното решаване на кубичните уравнения. Това е постигнато благодарение на усилията на четирима италиански учени – Сципион дел Феро, Николо Тарталя, Джероламо Кардано и Луиджи Ферари. На събитията около това откритие е посветената нашата беседа.

Сципион дел Феро (1465–1526). Все пак се е намерил човек, който не се стъписал от думите на Лука Пачоли и това бил професорът по математика в Болоня Сципион дел Феро. Той открил начин за решаване на уравнението $x^3 + ax = b$. Понеже по това време отрицателни числа не са били използвани, както и буквените означения в уравненията, уравнението $x^3 = ax + b$ се считало за друго уравнение. Според историческите източници той е имал начин за решаване на първото уравнение (ще видим защо тази забележка е толкова важна) и разказал своя подход на ученика си Антонио Марио Фиоре. След смъртта на своя учител Фиоре решил да се възползва от предоставения му подход с надеждата да бъде обявен за най-големият математик на Италия. И така, през 1534 година той предизвиква на „математически дуел“ професора по математика от Венеция Николо Тарталя, който по това време се считал за един от най-силните математици на Италия. Двубоят трябвало да се състои в решаване на по 30 задачи, предложени от всеки на другия в рамките на 50 дни. Тези решения трябвало да бъдат демонстрирани на публичен диспут в църквата пред избрано жури.

Николо Тарталя (около 1500–1557). По време на детството си родния му град Бреша бил завоюван от французите, а самият Тарталя бил ранен н гърлото, в резултат на което говорил с голяма трудност и оттук прякорът му Тарталя, т.е. пелтек. От 1534 г. живее във Венеция и работи като професор по математика там. Известна е неговата книга, посветена на комбинаториката, която той счита за своя активна дейност. След като получил предизвикателството на Фиоре, Тарталя се надявал на лека победа и не се стъписал от факта, че 30-те задачи, предложени от Фиоре са уравнения само от вида $x^3 + ax = b$ при различни a и b. Разчитайки на книгата на Пачоли, Тарталя бил уверен, че и Фиоре не може да реши тези задачи. Когато почти приключил срокът, до Тарталя достигнал слух, че все пак Фиоре знае как се решават тези уравнения. Перспективата да загуби двубоя го мотивирала да намери начин за решаване на уравненията буквално няколко часа до началото на състезанието. В резултат на това Тарталя удържал победа, защото за по-малко от 2 часа решил всички уравнения, предложени от Фиоре, а той от своя страна предложил на противника си 30 разнообразни задачи от различни области на математиката, от които Фиоре не решил нито една. Веднага след това Тарталя открива и начин за решаване на уравнението $x^3 = ax + b$. Както ще видим, това е съществена крачка за намиране формула за решаване на уравнение от трета степен. Победата в този двубой спечелила много приятели на Тарталя и един от тях – Джероламо Кардано, го уговорил да сподели своя метод с него.

Джероламо Кардано (1501–1576). Кардано е роден в семейство на юристи в Павия, получава университетско образование и решава да се посвети на медицината. През 1539 г. започнал да практикува медицина в Милано. Освен това той е бил аптекар, астролог, човек с разностранни интереси – интересувал се е от физика, механика и математика. Бил е автор на множество книги, но още в първата си книга „Практика по обща аритметика“ (идеята му била да замени великата книга на Пачоле) и след като чул за постиженията на Тарталя, там той за първи път публикува формулата за решаване на уравнения от трета степен, която е известна и до ден днешен като „формула на Кардано“. На това Тарталя откликва „Предайте на Негова Светлост, че ако аз исках да публикувам своето откритие, аз щях да го публикувам в собствен труд, а не в книгите на някой друг“. Така или иначе това недоразумение въпреки усилията на двамата, е неразрешено и така останала „формулата на Кардано“.

Луиджи Ферари (1522–1565). В математическите си занимания Кардано е бил подпомаган от младия Луиджи Ферари. През 1543 г. двамата – Кардано и Ферари, отиват в Болоня, за да открият метода, предложен от дел Феро. Там те се убедили, че този метод съвпада с метода на Тарталя. През 1545 г. Кардано успява да намери подход и за уравнението $x^3 + b = ax$, а малко по-късно Ферари открива метод за решаване на уравнения от четвърта степен, като използване формулата за решаване на уравнение от трета степен.

Каква е съдбата на нашите герои? Тарталя продължава да работи във Венеция като професор по математика и написва още няколко книги. Ферари се радва на голям успех и уважение, четял публични лекции в Рим, участва в управлението на университета в Милано. Кардано обаче не се радвал на щастлив живот. През 1570 година бил арестуван, измъчван и по-късно екзекутиран. Часове преди да бъде арестуван той унищожава всичките си 120 книги. Причината за ареста е неизвестна.

И така, формула за решаване на уравнението $x^3 + px + q = 0$, записана в съвременни означения, съществува и изглежда така

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

В този вид тя може да се намери във всеки справочник по математика. Изводът на тази формула е елементарен и е възможно да се обясни леко на ученици и студенти. Например, като заместим $x = y + z$ в уравнението, получаваме $y^3 + z^3 + 3yz\,(y + z) + p\,(y + z) + q = 0$, откъдето виждаме, че ако $y^3 + z^3 + q = 0$ и $3yz + p = 0$ уравнението се удовлетворява. Следователно, търсените величини y и z могат да се разглеждат като решение на системата

$$\left|\begin{array}{l} y^3 + z^3 = -q \\ yz = -\dfrac{q}{3} \end{array}\right. .$$

След повдигане в трета степен на второто уравнение, виждаме че y^3 и z^3 са корените на квадратното уравнение $t^2 + qt - \dfrac{p^3}{27} = 0$, които са $t_{1,2} = -\dfrac{q}{2} \pm \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}$ и формулата на Кардано е вече изведена, т.е.

$$x = y + z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Дали все пак някой от големите математици на древността не е имал подобна идея за решаване на кубичните уравнения можем само да гадаем. Но историята показва, че тази формула се появява именно през XVI век и именно в Италия. Това дава повод за размисъл. Нали едно уравнение от трета степен, както ни учи алгебрата, би трябвало да има три корена? Нека да вземем пример с уравнение с три корена. Да разгледаме уравнението $x^3 - x = 0$. Не са ни нужни никакви формули, за да се убедим, че трите корена са 0, -1 и 1. Сега да приложим формулата на Кардано. Имаме $p = -1$ и $q = 0$. Тогава $x = \sqrt[3]{\sqrt{-\dfrac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\dfrac{1}{27}}}$. Полученият резултат би изплашил всеки математик от древността. Обяснението, че корените на кубичното уравнение са три, се дължи на факта, че корен трети от едно число – комплексно или реално, има три различни стойности, които в общия случай са комплексни числа. Именно разглеждането на кубичното уравнение над множеството на комплексните числа е новата възрожденска идея, която не е била по силите на древните. Тази идея е типичната проява на Ренесанса – осмисляне на постиженията от древността и качествената промяна в резултата на дейностите на съвременния човек.

Именно използването на комплексните числа е в основата на изследването на броя на корените на уравнение с реални коефициенти от трета степен. Оказва се, че отговорът на този въпрос зависи от знака на числото $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. При $\Delta > 0$ уравнението има единствен реален корен. При $\Delta = 0$ уравнението има един прост и един двоен реален корен. При $\Delta < 0$ уравнението има три различни реални корени, макар че в този случай от формулата на Кардано получаваме корените в имагинерна форма. Този случай е известен под името „неразложим“ или Casus irreducibilis. Това е била причината, поради която този случай дълго време е останал неразбран.

Едва ли сега, от позицията на времето можем да опишем историята на това епохално събитие и отдадем справедливо заслуженото на всеки от участниците в него. Едва ли можем да подредим по значимост участието на всеки от посочените погоре математици. Няма да взимаме и страна в спора за приоритет между Тарталя и Кардано. От една страна, Тарталя достига до желаната формула, която споделя с Кардано, но тази формула е била получена по-рано и от дел Феро. От друга страна, Кардано и неговите ученици разработват техника за преобразуване на изрази, съдържащи корени от отрицателни числа, т.е. с комплексни числа, като по такъв начин се достига до окончателния вид на формулата. Освен това Кардано е имал идея и доказателство, че сборът от корените на разглежданите уравнения винаги е нула, т.е. той е знаел една от формулите на Виет. Също така достига и до идеята за кратните корени на уравнението и др. Вероятно трябва да отсъдим, че преди всичко главните виновници за това епохално откритие, без да омаловажаваме усилията на споменатите математици, са времето – Ренесанса, и мястото – Италия.

Смисълът на тази беседа е да привлече вниманието на слушателите каква важна роля играе проследяването на историческите събития в развитието на математическите идеи. Този исторически подход може да послужи като стратегически резерв за повишаване качеството на обучението по математика и повишаване на уменията на учениците да решават задачи.

Иван Костадинов Тонов
Факултет по математика и информатика
Софийски Университет „Св. Кл. Охридски“
бул. Джеймс Баучер № 5
1164 София
e-mail: tonov@fmi.uni-sofia.bg

THE GREAT ART OR MIRACLES OF XVI CENTURY

Ivan Tonov

In the paper we discuss the role of the famous discovery of a formula for solving cubic equations from historical and methodological point of view.