МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2016
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2016
Proceedings of the Forty Fifth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Pleven, April 6–10, 2016

ЗА ТРИСЕКЦИЯТА НА ЪГЪЛА – СЕРИОЗНО!

Георги Димков, Десислава Димкова

Три задачи от геометрията: удвояване на обема на куб, разделяне на ъгъл на три равни части, построяване на квадрат, равнолицев с даден кръг, са станали прочути, заради невъзможността да бъдат решени с линийка и пергел. Решения са намерени с използване на нови инструменти, доусъвършенстване на старите, както и благодарение на възникване на нови идеи. Тук имаме възможност да се запознаем с тях.

Три сродни проблема. Възможно ли е даден ъгъл да бъде разделен на три равни части с помощта на линийка и пергел? Нека уточним – с едностранна линийка. Само едната ѝ страна е права и може да се използва за прекарване на прави и върху нея няма никакви отметки, мерки и пр. Този въпрос са си задавали древните математици преди 2500 години, а може би и още по-рано. Всички опити завършвали безуспешно. Все пак на човек му се иска да разбере дали не е пропусната някаква възможност, дали не съществува комбинация от операции, извършена с тези два инструмента, която решава въпроса.

Край на тези съмнения слага студентът по строителство на пътища и мостове Пиер Лоран Ванцел (1814 – 1848). През 1837 година той публикува статията

Изследване на възможностите за установяване дали една задача от геометрията може да се реши с линийка и пергел [1]

В статията в частност Ванцел отбелязва, че корените на уравнение от трета степен не могат да бъдат построени с линийка и пергел.

Да припомним класическите проблеми, без да повтаряме преданията и легендите за тяхната поява.

Куб с дължина на ръба a има обем – $V = a^3$. Каква е дължината x на ръба на куб с обем $2V = 2a^3$? Тя е решение на уравнението

$$x^3 = 2a^3.$$

Да изберем произволен ъгъл с големина α. С помощта на линийка и пергел можем да построим отсечка с дължина $b = \cos\alpha$. Можем ли да построим отсечка с дължина $x = \cos\dfrac{\alpha}{3}$? С помощта на известната формула $\cos\alpha = 4.\cos^3\dfrac{\alpha}{3} - 3.\cos\dfrac{\alpha}{3}$ получаваме следното уравнение

$$4x^3 - 3x = b.$$

При b =0 задачата е решима с линийка и пергел и резултатът е добре известен. При $b \neq 0$ обаче това е невъзможно.

Кръг с радиус r има лице $S = \pi r^2$. За да построим квадрат, равнолицев с този кръг, трябва да построим отсечка с дължина $a = r\sqrt{\pi}$. Но отсечка с дължина π не може да бъде построена и задачата не може да бъде решена.

Към задачите, нерешими с линийка и пергел, спада още построяването на правилен седмоъгълник. Да означим неговия централен ъгъл с $\beta = \dfrac{2\pi}{7}$. Можем ли да построим отсечка с дължина $x = \cos\beta$? Тъй като $7\beta = 2\pi$, то $\cos 4\beta = \cos(2\pi - 4\beta) = \cos 3\beta$. Прилагайки познатите формули от тригонометрията, получаваме уравнението

$$(x-1)\left(8x^3 + 4x^2 - 4x + 1\right) = 0.$$

Тъй като $\cos\dfrac{2\pi}{7} \neq 1$, търсената величина е решение на уравнението

$$8x^3 + 4x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Неразрешените проблеми са предизвикателство! Какви отговори са дадени през вековете на тези предизвикателства [2].

Хипократ от Хиос (470–410 пр. Хр.) твърдял, че задачата за удвояване на обема на куба е разрешима с намирането на две отсечки – x и y – средно пропорционални на две дадени отсечки a и b, т.е. четирите отсечки изпълняват условието $\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{b}$.

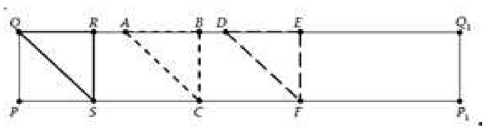
Платон (428–348 пр. Хр.) предложил механическо решение с помощта на три триъгълника.

Архит (428–348 пр. Хр.) намерил решение с пресичане на цилиндър, конус и тор.

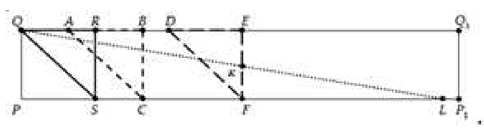
Менехм (380–320 пр. Хр.) намерил две решения с пресичане на две параболи и парабола и хипербола.

Всички тези решения трудно се прилагат на практика.

Ератостен (276–195 пр. Хр.) построява уред, наречен *мезолабия*, който реализира идеята на Хипократ. Това е правоъгълна рамка (фиг. 1), в която са вместени три правоъгълни равнобедрени триъгълника с катет, равен на ширината на рамката. Най-левият триъгълник е закрепен неподвижно, а останалите два се плъзгат в рамката. За операциите, които предстои да бъдат извършени, е необходимо въвеждането на единица мярка. Това ще бъде отсечката PQ. Ако сме избрали отсечка $a > PQ$, ще я заменим с отсечката $\dfrac{1}{a}$. От точка F по посока на точка E нанасяме отсечката, с която ще работим. Да означим с K втория ѝ край (фиг. 2). Прекарваме права от Q през K до пресичането ѝ с PP_1 в точка L. При движението на ΔDEF вътре в рамката точка L се движи по долната основа на правоъгълника.

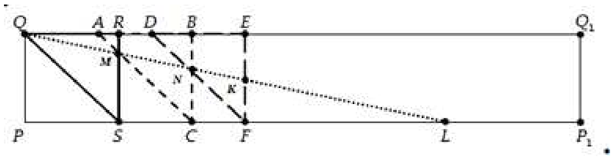


фиг. 1



фиг. 2

Движим подвижните триъгълници, докато двете подвижните точки $M = RS \times AC$ и $N = BC \times DF$ застанат на една права (фиг. 3) [3].



фиг. 3

Тогава $\Delta KFL \cong \Delta NCL \;\Rightarrow\; \dfrac{KF}{NC} = \dfrac{LF}{LC}$, $\Delta NFL \cong \Delta MCL \;\rightarrow\; \dfrac{LF}{LC} = \dfrac{LN}{LM}$, $\Delta NCL \cong \Delta MSL \;\Rightarrow\; \dfrac{LN}{LM} = \dfrac{NC}{MS}$. Така получаваме $\dfrac{KF}{CN} = \dfrac{CN}{MS}$.

Повтаряме подобни разсъждения, като започваме от подобието $\Delta NCL \cong \Delta MSL$ и получаваме като краен резултат $\dfrac{NC}{MS} = \dfrac{MS}{PQ}$.

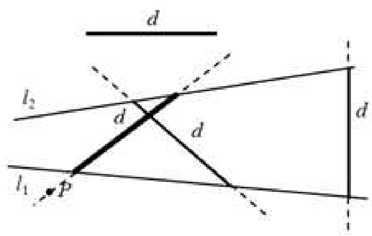
Като комбинираме с предишния резултат, получаваме

$$\frac{KF}{NC} = \frac{NC}{MS} = \frac{MS}{PQ}. \quad \text{Сравнете с} \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

Тогава $MS = \sqrt[3]{KF.PQ^2}$. При $KF = \dfrac{PQ}{2}$ получаваме $MS = \dfrac{PQ}{\sqrt[3]{2}}$.

Следната помощна задача – също нерешима с линийка и пергел – ще ни доведе до разрешаването на трисекцията.

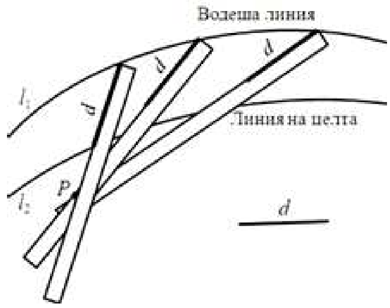
В равнината са дадени: две линии l_1 и l_2, фиксирана точка P и отсечка с фиксирана дължина d. Да се вмести дадената отсечка между двете линии, като тя самата или правата – нейно продължение минава през точката P (фиг. 4).



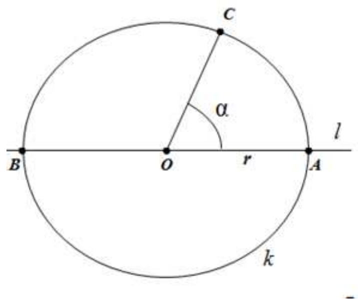
фиг. 4

Решението става възможно със специална линийка, наречена *невсис* [4]. Тя също е едностранна, но от единия ѝ край е отбелязана отсечка – *диастема* – с дължина, равна на дадената в задачата отсечка d. Невсисът се допира постоянно до фиксирана точка P – *полюс* – и се плъзга по нея. Единият му край следва една от зададените линии – водеща, дотогава, докато другият край попадне върху втората линия – на целта (фиг. 5).

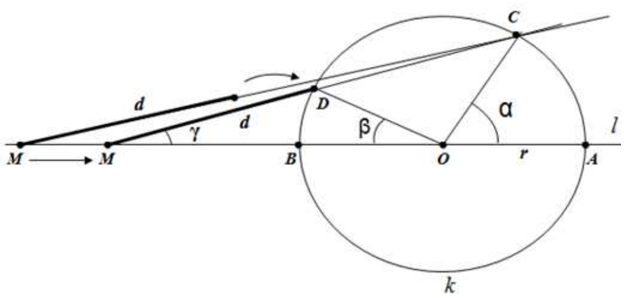
Да построим окръжност $k(O, r)$ и да прекараме права l през центъра с пресечни точки A и B. От радиуса OA да отмерим ъгъл α с крайно рамо OC (фиг. 6). Между l и k да вместим отсечка с дължина r, минаваща през C. Това лесно се постига с невсис с полюс C и диастема r (фиг. 7).



фиг. 5



фиг. 6



фиг. 7

Тогава $\gamma = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$. Но $\gamma = \beta$, следователно $\beta = \dfrac{\alpha}{3}$.

По-трудно се намира начинът за построяване на правилен седмоъгълник [5]. За целта използваме триъгълника от фиг. 8а. Всички плътни отсечки са равни и имат дължина 1. Чертежът не е реален, тъй като не е построим с линийка и пергел.

Да означим $\sphericalangle DAE = \alpha$.

$$AB = BC \;\Rightarrow \sphericalangle\, CBD = 2\alpha. \quad CD = BC \;\Rightarrow \sphericalangle\, DCE + \sphericalangle BCA = 4\alpha.$$

$$BCA = \alpha \;\Rightarrow \sphericalangle\, DCE = 3\alpha. \quad CD = DE \;\Rightarrow \sphericalangle\, CED = \sphericalangle AED = 3\alpha\ .$$

Тъй като ΔAED е равнобедрен, сборът от ъглите му е $7\alpha = \pi$, т.е. $\alpha = \dfrac{\pi}{7}$.

Да означим с s и t съответно дължините на отсечките BF и FD.

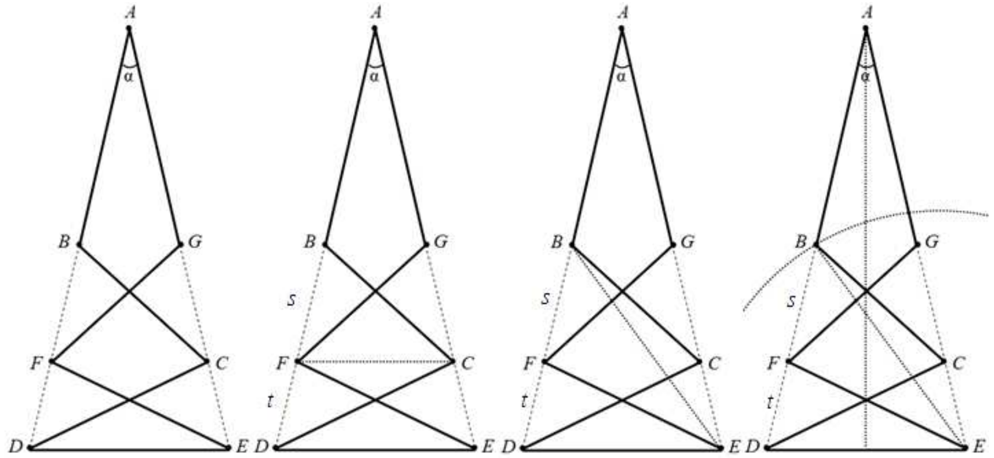
$$FE = DE \;\Rightarrow 2\cos\left(\sphericalangle EDF\right) = t.$$

$$FC \parallel DE \;\Rightarrow \sphericalangle\, ACF = 3\alpha \;\Rightarrow \sphericalangle\, BCF = 2\alpha.$$

$$\sphericalangle CBD = \sphericalangle BCF = 2\alpha.$$

Това означава, че ΔBFC е равнобедрен и следователно $FC = FB = s$. Тогава, по теоремата на Талес

$$\frac{1+s}{1+s+t} = \frac{s}{1} \Rightarrow \; s^2 + st = 1.$$



фиг. 8а фиг. 8б фиг. 8в фиг. 8г

С косинусова теорема в ΔBDE получаваме

$BE^2 = DE^2 + BD^2 - 2.BD.DE.\cos(\sphericalangle EDF) = 1 + (s+t)^2 - t(s+t) = 1 + s^2 + st = 2.$

Следователно $BE = \sqrt{2}$ (фиг. 8в).

Да начертаем дъга от окръжността с център E и радиус BE и симетралата на ED (фиг. 8г). Единият край на отсечката $AB = DE$ лежи на дъгата, а другият – на симетралата. Продължението ѝ минава през точка D.

На практика трябва да извършим следните операции:

– избираме отсечка, която да бъде страна на седмоъгълника – DE;

– построяваме симетралата на DE и дъга от окръжността с център E и радиус $DE\sqrt{2}$ (фиг. 9а);

– с помощта на невсис с полюс D и диастема DE намираме точките A върху симетралата и B върху окръжността (фиг. 9б);

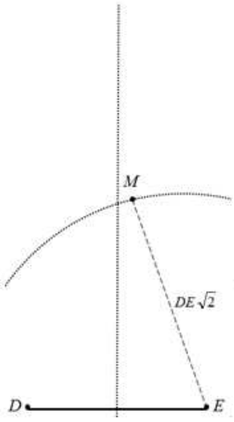
– построяваме ΔADE и описаната около него окръжност (фиг. 9в).

$$DOE = \frac{2\pi}{7}$$

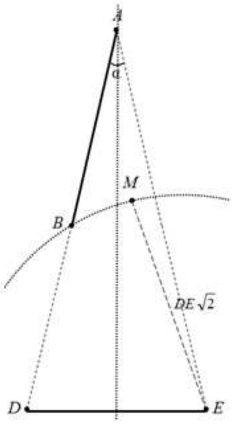
Древногръцкият математик Хипий от Елис (V век пр. Хр) предложил следната конструкция. На разстояние t от долната основа на квадрат прекарваме хоризонтална права (фиг. 10) [6]. С начално рамо долната основа на квадрата построяваме ъгъл с големина $\frac{\pi}{2}t$. При движението на t от 1 до 0 пресечната точка на тези две прави описва крива – *квадратриса*. На фигура 11 е показано устройство – своего рода пергел, с който може ръчно да се построи кривата [7].

Диностратат (390–320 пр. Хр.), брат на Менехм, доказва, че $\dfrac{AG}{AB} = \dfrac{AB}{l(BD)}$ [8]. В наши дни е лесно да бъде намерено уравнението на квадратрисата при $AB = 1$:

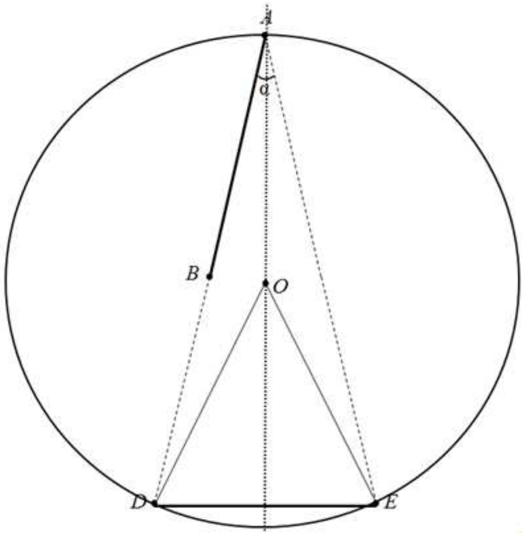
$$x = t.\cot\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$



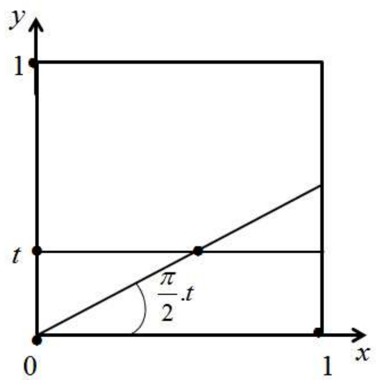
Фиг. 9а



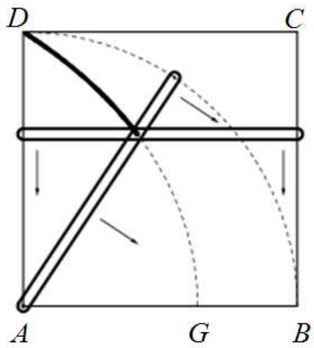
Фиг. 9б



Фиг. 9в



Фиг. 10



Фиг. 11

И още $AG = \lim_{t \to 0} \left\{ t.\cot \frac{\pi t}{2} \right\} = \frac{2}{\pi}$. Този резултат решава квадратурата на кръга.

ЛИТЕРАТУРА

[1] https://fr.wikisource.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Wantzel

[2] . http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Doubling_the_cube.html

[3] http://www.rechnerlexikon.de/upload/7/7b/Mesolab.swf

[4] https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D0%B2%D1%81%D0%B8%D1%81

[5] https://fr.wikipedia.org/wiki/Heptagone
[6] https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B8%D0%BF%D0%BF%D0%B8%D0%B9_%D0%AD%D0%BB%D0%B8%D0%B4%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9
[7] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Quadratrix_animation.gif?uselang=ru
[8] https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D1%82

Георги Димков
e-mail: gdimkov@math.bas.bg
Десислава Димкова
e-mail: ddimkova@math.bas.bg
Институт по математика и информатика
ул. Акад. Георги Бончев бл. 8
1113 София

ON THE TRISECTION OF AN ANGLE – SERIOUSLY SPEAKING!

Georgi Dimkov, Dessislava Dimkova

The heritage of the ancient Greek mathematicians contains three problems unsolvable using ruler and compass: doubling the volume of a given cube, trisecting a given angle and constructing a square with the same area as a given circle. During the millenia different solutions were given using improvement of the existing instruments, introduction of new instruments, new ideas. The aim of the present article is to show some of them.