МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2016
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2016
Proceedings of the Forty Fifth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Pleven, April 6–10, 2016

ВЪЗРАСТОВО-ОБОСОБЕНИ РАЗЛИКИ ПРИ РАБОТА ПО ЕДНА ТЕМА

Борислав Лазаров, Албена Василева

В статията се разглежда конкретна състезателна тема от математическия турнир *Черноризец Храбър*. Дадени са няколко примера в подкрепа на тезата на авторите, че възрастовият фактор може да играе съществена роля при преноса на знания и умения от един образователен контекст в друг.

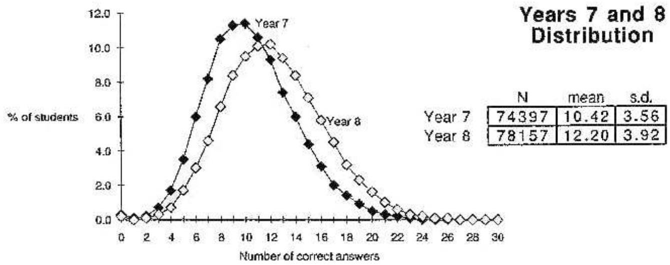
Актуалност. В регламента на турнира *Черноризец Храбър* възрастовите групи са определени от двойки класове: 3. и 4. клас работят по една състезателна тема; същото важи за 5. и 6., 7. и 8., 9. и 10., 11. и 12 клас [1]. Такова възрастово разпределение има и в други математически състезания. У нас (на българските състезания) в по-високите класове практически не се проявяват разлики в представянето на учениците, породени от фактора възраст.[1] Обаче за по-малките ученици този фактор играе сериозна роля в представянето им по определен тип задачи, а в други случаи изненадващо не оказва влияние. В статията сме разгледали някои примери за представянето на ученици от 5. и 6. клас върху темата от XXIII издание на Турнира [2]. Наблюденията и изводите ни могат да послужат като основа за априорни експертни оценки на трудността на тестовите единици, когато не е възможно калибриране на състезателни тестове, предназначени за ученици от различни възрастови групи.

Идеалният случай. Статистическият анализ на резултатите от Австралийското математическо състезание (първообраз на състезанията *Европейско кенгуру* и *Черноризец Храбър*) ни дава представа за типична разлика в представянето на ученици от различни възрастови групи по една състезателна тема (Фиг. 1).

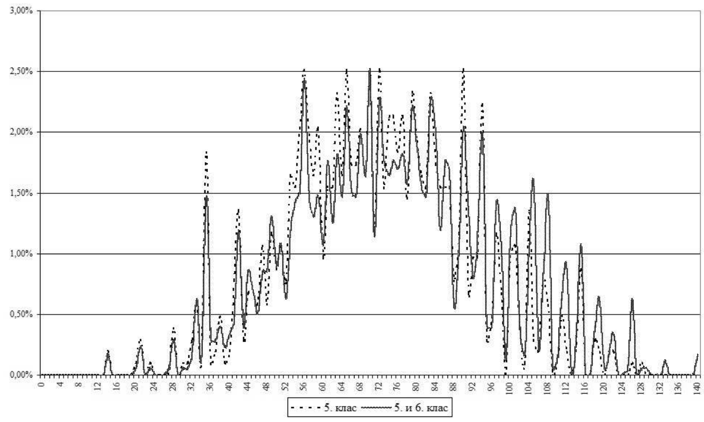
Стремежът при съставянето на състезателна тема е да постигнем подобна статистика, а подреждането на тестовите единици (ТЕ) да е в синхрон с трудността им. Програмата-максимум е подреждането на ТЕ по трудност да е с нарастващ коефициент. Но въпреки сериозния експертен опит, който сме натрупали, априорните ни оценки често се разминават с апостериорната картина, за което става дума в следващата част.

Два конкретни вариационни реда. Ние анализирахме представянето на учениците в двете възрастови групи 5. и 6. клас на основата на резултатите от едно „гнездо“, което до голяма степен е типично за цялата популация. Такова представяне е характерно за средно голям град.

[1]Едно сравнение на резултатите в 11. и 12. клас върху темата от [2] може да се направи по класирането, представено на адресите `http://www.math.bas.bg/ch/2014/sf11.htm` и `http://www.math.bas.bg/ch/2014/sf12.htm`.

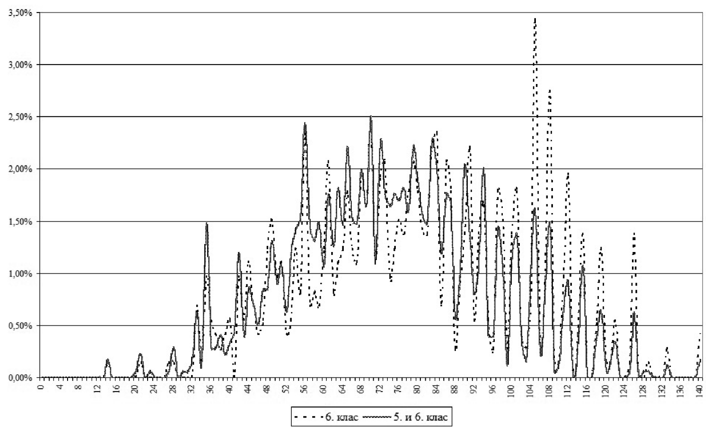


Фиг. 1. Графиката е копирана от [3], с. 68.



Фиг. 2. Общият вариационен ред и този на извадката 5. клас

На Фигури 2. и 3. с плътна линия е показан вариационният ред на представянето на всички ученици, а с пунктири – съответно за 5. и 6. клас в разгледаното гнездо.



Фиг. 3. Общият вариационен ред и този на извадката 6. клас

Двете графики като цяло отговарят на очакванията ни за представянето на учениците. Разбира се, те не могат да отразят спецификите по тематичните направления, застъпени в състезателната тема. Затова разгледахме показатели, отразяващи трудността и разграничителната сила на ТЕ. За трудност приемаме числото (100 минус процента на получените верни отговори) на разглежданата ТЕ, а за разграничителна сила – разликата от процентите верни отговори в четвъртия и първия квартил от вариационния ред. Тези специфики илюстрираме с няколко примера.

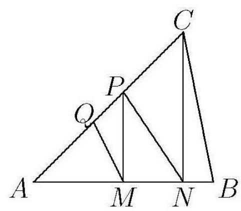
Примери. По-нататък с $T_{5,6}$ означаваме трудността на разглежданата ТЕ в групите 5. и 6. клас съответно; с $D_{5,6}$ означаваме разграничителната сила на ТЕ, съответно на 5. и 6. клас. Приведените решения са от съставителя на темата и отразяват априорната гледна точка, повлияла на методиката по съставянето на състезателната тема. Коментарите, напротив, осветляват апостериорното състояние и третират статистиката предимно в светлината на възрастовите особености.

ТЕ9. Какъв ъгъл сключват стрелките на часовника в 10 часа̀ и 10 минути?
А) $120°$ Б) $118°$ **В)** $115°$ Г) $112°$ Д) никой от тези

Решение. Минутната стрелка е на $60°$ след 12 ч. За 60 минути часовата стрелка се завърта на $30°$, а за 10 минути – на 6 пъти по-малък ъгъл, т.е. на $5°$. Понеже в 10 ч е сключвала ъгъл $60°$ с посоката 12 ч, в 10:10 тя е сключвала $55°$. Така ъгълът между часовата стрелка и минутната в 10:10 е $(55 + 60)°$ – отговор В).

Коментар. Статистическите показатели на тази ТЕ са $T_5 = 90,3$; $D_5 = -2,8$ и $T_6 = 84,1$; $D_6 = 13,6$. Това е типичен пример за проява на възрастово обособена разлика, доколкото никакъв допълнителен материал по тази тема не е изучаван между 5. и 6. клас. Показателите са в съответствие с тези от Фигура 1 – незначително понижаване на трудността в по-високата възрастова група.

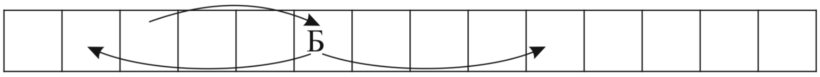
ТЕ17. Триъгълникът ABC е разбит на пет равнолицеви триъгълника: AMQ, PMQ, MNP, CPN и BCN. Ако AB е 45 см, то колко сантиметра е MN?
А) 12 Б) 15 В) 16 Г) 18 Д) никое от тези



Решение. От $S_{ANC} = 4S_{BNC}$ следва $AN = 4BN$, откъдето намираме $BN = 9$, $AN = 36$ см. От $S_{APM} = 2S_{MNP}$ следва $AM = 2MN$, откъдето намираме $MN = 12$ см – отговор А).

Коментар. Статистическите показатели на тази ТЕ са $T_5 = 98,6$; $D_5 = -2,8$ и $T_6 = 86,4$; $D_6 = 4,5$ – най-трудната задача в състезателната тема. Възрастовите особености се проявяват в опитността при поемане на риск: по-големите вече не се решават да „хвърлят зарове“, а предпочитат да се опират на сигурните си знания и умения.

ТЕ19. Кутия, дълга 14 см и широка 1 см, е разделена на 14 квадратни клетки 1×1 см. В центъра на най-лявата клетка се намира бълхата Б. Първият скок на Б е 1 см и тя попада в центъра на съседната клетка. Всеки следващ скок тя увеличава с 1 см, попадайки в центъра на клетка от кутията. С колко най-много хода Б може да попадне в най-дясната клетка?



А) 6   Б) 10   В) 12   Г) 14   **Д)** никой от тези

Решение. Скоковете надясно добавяме, а скоковете наляво изваждаме от номера на клетката. Най-дългият скок може да е 13 см (иначе бълхата излиза от кутията). Преместване с 13 скока става така $1+2-3+4+5-6+7-8+9-10+11-12+13$ – отговор Д).

Коментар. Статистическите показатели на тази ТЕ са $T_5 = 70,8$; $D_5 = 8,3$ и $T_6 = 70,5$; $D_6 = 4,5$. Практически в двете възрастови групи няма разлика в трудността.

ТЕ20. По колко начина числото 5 може да се представи като сбор на по-малки естествени числа, ако редът на събираемите е съществен? Например $3 = 1+2 = 2+1 = 1+1+1$, т.е. 3 се представя по 3 начина.

А) 5   Б) 10   В) 15   Г) 30   Д) никой от тези

Решение. Да разгледаме събираемите като сбор на единици, например ако $5 = 1+2+2$, то да си мислим за представянето $5 = 1+(1+1)+(1+1)$. На такова представяне да съпоставим следното разбиване с разделителя | на последователност от пет единици с |: 1|11|11. Разсъждавайки по този начин установяваме, че колкото са сборовете, толкова са и разбиванията на 11111 с поне една |. Но разбиванията са точно колкото са начините на 4 места да се постави или не |, като поне една | е поставена, т.е. $16-1$ – отговор В).

Коментар. Статистическите показатели на тази ТЕ са $T_5 = 59,7$; $D_5 = 19,4$ и $T_6 = 50,0$; $D_6 = 0$. Макар в числово изражение разликите във възрастовите групи да изглеждат значителни, ние считаме, че те са единствено следствие на факторите време и умора. Някои от по-малките ученици не успяват да стигнат до последните задачи от темата, което може да се отчете като по-малка опитност в разпределението на времето.

Наблюдения и изводи. Примерите, които разгледахме, могат да се групират по двойки: свързани пряко с учебния материал са ТЕ9 и ТЕ17; тематика, специфична за извънкласни дейности по математика – ТЕ19 и ТЕ20. Прави впечатление, че трудността на първите две ТЕ значително надвишава тази на другите две. Възрастовите особености, свързани с конкретни знания и умения, придобити в рамките на задължителната програма, малко влияят на представянето. Възрастовите особености, свързани с избор на стратегия и поемане на риск, обаче, имат съществено влияние върху представянето. За лошото представяне по отделни ТЕ ще се съгласим с У. Аткинс, че „… то не се отнася до неадекватните знания и умения в конкретна възраст или клас, но повече до факта, че съответните умения не се разработват достатъчно в училищната програма.“ [4, с. 5][2] Но за цялостния процес на деконтекстуализация възрастовият фактор е определящ.

Заключение. Все по-често, включително в новите нормативни документи, регламентиращи българското образование, се спекулира с думата компетенция. Едва

[2][… the poor performance on some questions could be ...] not due to the inappropriateness of the skill for the particular age or grade level, but rather that the appropriate problem solving skills are not emphasized and developed in the typical school curriculum.

ли не у първолаците ще изградим компетенции, т.е. след завършен първи клас малчуганите ще са експерти, например по събиране на числата от 1 до 20. Нашата позиция е, че компетенции не могат да се изграждат до края на задължителното образование, т.е. 8. клас. Даже и най-изявените в математическо направление ученици от 5. и 6. клас нямат оформен пакет знания-умения-нагласа(ЗУН), който да може да се приеме за компетенция. Доказателства бяха представени по-горе: преносът на ЗУН от контекста на изграждането им в нов контекст не се реализира в задоволителен обем; опитността в състезателен план е съществено обусловена от възрастта. Образователната и изследователска програма на Института по математика и информатика **Черноризец Храбър** дава възможност да се хвърли светлина върху тези и други фундаментални въпроси от теорията на математическото образование. Нашите надежди са, че образователната практика, дирижирана от управленските кадри, в един момент ще се позове и на научния подход.

Бележка. Авторите благодарят на рецензента за ценните препоръки, свързани с използваната от нас нотация. Наред с това следва да обясним нашата гледна точка относно терминологията, която сме въвели достатъчно прецизно и после коректно сме използвали в статията.

1) *Тестова единица.* Още в далечната 1999 г. Лазаров [5] разграничава *задача* от *упражнение* и *предизвикателство.* Това не е случайно. Упражнението е простичка проверка на най-основни знания и умения, решаването на задачата изисква по-дълбоко осмисляне, а предизвикателството е продуктивна дейност. Решението или посочването на отговор са със самостоятелно значение. Повече детайли са дадени в [6], а темата има развитие в [7]. Тестовата единица (test item, test question) е нещо различно. Тук от ученика не се изисква решение, а определяне на един от няколко отговора на поставен въпрос. Как ще го направи ученикът е мистерия. Отделно взетата тестова единица е значима само и единствено в рамките на конкретен тест, а цялата състезателна тема може да се разглежда като една мета-задача.

2) *Трудност и разграничителна сила на тестова задача.* Въпросите около статистическата обработка на данните от един тест са сложни и многостранни, затова само ще отбележим, че различните изследователи ги интерпретират за целите си според нуждите на изследването си. Подробно тази тематика е разгледана в [8, с 187-194]. Определянето на екстремалните групи в нашето изследване е в пълно съответствие с теорията, а числовите характеристики в представената от нас модификация имат несъмнени предимства.

ЛИТЕРАТУРА

[1] `http://www.math.bas.bg/ch/about.php` (active in Nov 2015)

[2] Б. Лазаров. Двадесет и трети Есенен математически турнир „Черноризец Храбър“, ИМИ–БАН, София, 2015 г.

[3] D. G. Pederson (Ed). Australian mathematics competition 1990 solutions and statistics. Belconnen, Australian Mathematics Foundation, 1990.

[4] W. Atkins. Problem solving via AMC. Belconnen, Australian Mathematics Foundation, 1992.

[5] Б. Лазаров, Т. Георгиева. Задачи и тестове по математика за 5. клас. КК Труд, София, 1999.

[6] Ив. Тонов. Обучение на учители чрез решаване на задачи. Математика и информатика, бр. 3, 2005 г.
[7] B. Lazarov. Tuning a math problem. (2006) In ICMI STUDY 16 Challenging Mathematics in and beyond the Classroom. `http://www.amt.edu.au/icmis16pbullazarov.pdf`
[8] Г. Бижков. Теория и методика на дидактическите тестове. Просвета, София, 1996 г.

Борислав Лазаров
e-mail: lazarov@math.bas.bg
Албена Василева
e-mail: albena@math.bas.bg
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. Акад. Георги Бончев, бл. 8
1113 София

AGE-DEPENDENT SPECIFICS OF STUDENT PERFORMANCE ON A SAME COMPETITION PAPER

Borislav Lazarov, Albena Vassileva

The paper is focused on a particular contest paper from the *Chernorizetz Hrabar* Tournament in Bulgaria. A couple of examples are given to advocate the authors' thesis that the age factor could be significant in transition of knowledge and skills from one educational context to another.

Key words: multiple-choice competitions, age factor, decontextualization