МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2016
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2016
Proceedings of the Forty Fifth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Pleven, April 6–10, 2016

ОТ ПРАВА НА СИМСЪН ДО ПРАВА НА ТАБОВ: МАРШРУТ ЗА ИЗСЛЕДОВАТЕЛИ

Невена Събева-Колева

Статията представя учебен сценарий в стила на експерименталната математика. Разгледана е геометрична конфигурация, която включва права на Симсън, точка на Грифитс и права на Табов. Чрез използване на динамичен геометричен софтуер геометричните обекти се онагледяват и ученикът е въвлечен в процеса на изследването им, като експериментира, формулира хипотези и търси теоретични доказателства за тях. Темата е подходяща за извънкласна работа с ученици от 9.–12. клас с изявен интерес към математиката.

Достъпността на съвременните компютърни инструменти прави реална възможността любознателният ученик да влезе в ролята на изследовател и експериментирайки, да преоткрие известни математически факти и дори да получи нови резултати. За обучение в този дух са необходими подходящи дидактически сценарии, съобразени с нивото на подготовка и познавателните интереси на конкретния ученик или група ученици.

Предложеният сценарий е предназначен за извънкласна работа с изявени ученици от 9.–12. клас и представя математическо „пътешествие“ в три части. Маршрутът започва с права на Симсън, минава през точка на Грифитс и продължава към права на Табов [1]. На основата на подходящи динамични модели, ученикът има възможност да есперисментира и да прави предположения за свойствата на разглежданата конфигурация. Някои „крайпътни“ наблюдения в хода на това пътешествие са интересни, неповърхностни геометрични факти. А необходимостта от теоретична проверка на формулираните хипотези мотивира ученика да овладее допълнителни знания от областта на проективната геометрия или умения за работа с комплексни числа.

Пътешествието започва с позната геометрична конфигурация.

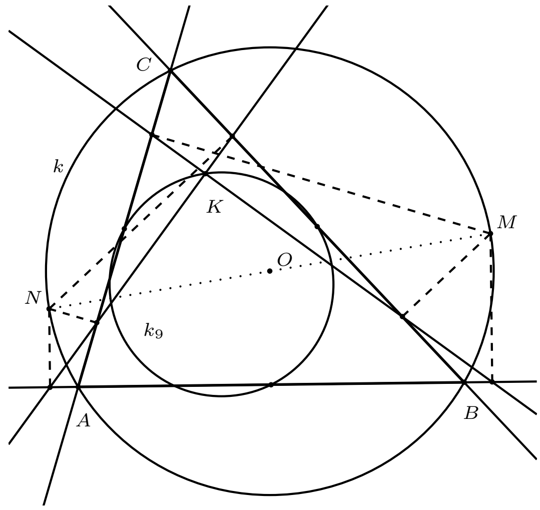
Етап 1. От правата на Симсън. Около триъгълника ABC е описана окръжност k_{ABC} с център O. На всяка точка $M \in k_{ABC}$ съответства права на Симсън s_M спрямо дадения триъгълник.

Проблем. Нека M и N са диаметрално противоположни точки от описаната окръжност и K е пресечната точка на съответните им прави на Симсън s_M и s_N. Какво се случва с точката K, когато M се движи по окръжността k_{ABC}?

Експеримент. GeoGebra позволява на ученика да изготви самостоятелно динамичен модел на конфигурацията, на който да се наблюдава движението на точката K, когато M се движи по описаната окръжност (фиг. 1).

Хипотезата, която лесно може да се провери експериментално, е, че когато M се движи по k_{ABC}, точката K описва окръжността на деветте точки k_9 на дадения триъгълник ABC.

Доказателството на горния факт не надхвърля границите на учебния материал за 9. клас. Достатъчно е да се забележи, че $s_M \perp s_N$ и да се докаже, че правата на Симсън на произволна точка $M \in k_{ABC}$ разполовява отсечката MH, където H е ортоцентърът на ABC (вж. [2], стр. 235). Друго доказателство е дадено в [3], стр. 115.



Фиг. 1

В търсене на нови геометрични факти често е полезно да се погледне по различен начин на познатите; такъв поглед към доказаното свойство на правите на Симсън позволява да се продължи към точката на Грифитс.

Стъпка 2. Към точката на Грифитс. Тъй като k_9 е описаната окръжност около педалния триъгълник на центъра O, а правите s_M и s_N могат да се разглеждат като описани окръжности около изродените педални триъгълници съответно на точките M и N, може да се каже, че описаните окръжности около педалните триъгълници на колинеарните точки O, M и N имат обща точка K. Оттук по естествен начин възниква следващия въпрос.

Проблем. Минава ли през точка K описаната окръжност и на друг педален триъгълник, определен от точка P от правата OM?

Експеримент. Ученикът може да адаптира динамичния модел, използван в предишния етап, като фиксира точката $M \in k_{ABC}$, избере произволна точка $P \in OM$ и построи описаната окръжност k_P около педалния ѝ триъгълник. Като наблюдава поведението на k_P (в режим „следа“) при движение на P по MN (фиг. 2), ученикът стига по експериментален път до следното предположение.

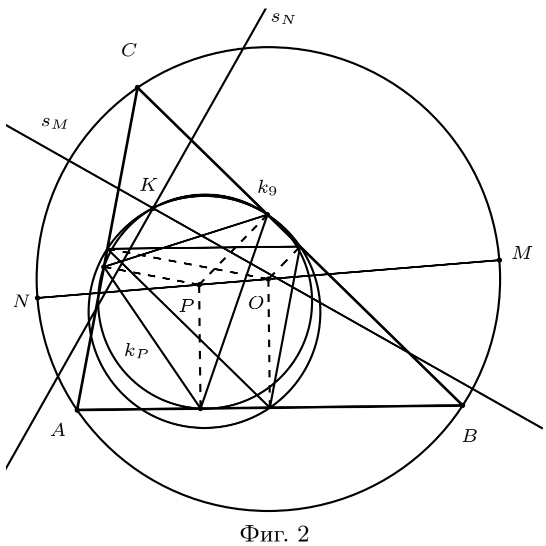
Хипотеза. Когато точката P се движи по фиксирана права OM през O, описаната окръжност около педалния триъгълник на P спрямо ABC минава през точката $K = s_M \cap s_N$.

Доказателство. До експерименталния резултат се стига лесно и бързо, но в случая теоретичното доказателство изисква повече усилия и време.

Нека в координатна система с център O, единична окръжност k_{ABC} и реална ос OM на точките A, B, C, P отговарят комплексните числа a, b, c, p. Като първо упражнение може да се докаже, че проекциите на P върху BC, CA, AB отговарят съответно числата $p_a = \frac{1}{2}(b+c+p-bcp)$, $p_b = \frac{1}{2}(c+a+p-cap)$, $p_c = \frac{1}{2}(a+b+p-abp)$ (вж. [4], стр. 47). Оттук при $p = 1$ се получават проекциите на M, които определят правата на Симсън $s_M: \ z - abc\bar{z} = 1 - abc + \frac{1}{2}(a-1)(b-1)(c-1)$, а при $p = -1$ проекциите на N определят $s_N: \ z + abc\bar{z} = -1 - abc + \frac{1}{2}(a+1)(b+1)(c+1)$. На пресечната им точка $K = s_M \cap s_N$ отговаря комплексното число $k = \frac{1}{2}(a+b+c-abc)$. Точката K лежи на окръжността през проекциите на P върху BC, CA, AB точно когато е изпълнено условието

$$\frac{k-p_b}{p_a-p_b} : \frac{k-p_c}{p_a-p_c} = \frac{\overline{k}-\overline{p_b}}{\overline{p_a}-\overline{p_b}} : \frac{\overline{k}-\overline{p_c}}{\overline{p_a}-\overline{p_c}},$$

с чиято проверка доказателството е завършено.



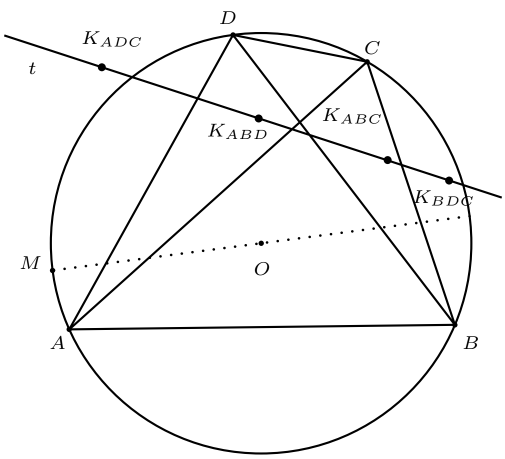
Фиг. 2

Точката K, през която минават описаните окръжности на педалните триъгълници на точките от правата правата OM, се нарича точка на Грифитс, определена от триъгълника ABC и правата OM. Съществуването на тази точка е получено в [5] с използване на проективна геометрия. Също в [5] е доказано, че точката на Грифитс е ортополюс на триъгълника ABC спрямо правата OM; т.е. ако се построят ортогоналните проекции A_1, B_1, C_1 на A, B, C върху правата OM, то правите през A_1, B_1, C_1, перпендикулярни съответно на BC, CA, AB, се пресичат в точката K. Това твърдение може лесно да се потвърди експериментално, но доказателството му изисква сериозна теоретична подготовка. По-естествено е да се продължи „пътешествието“ в друга посока – към правата на Табов.

Стъпка 3. До правата на Табов. При фиксирана точка M от окръжността k_{ABC} се определя точка на Грифитс, която зависи от триъгълника ABC и може да се означи с K_{ABC}. По същия начин за точка M и произволен триъгълник Δ, вписан в k_{ABC}, е определена точка на Грифитс K_{Δ}. Възниква въпросът как са разположени тези точки на Грифитс за дадено множество триъгълници, вписани в k_{ABC}.

Проблем. Ако $D \in k_{ABC}$ и OM е фиксирана права, за всеки от триъгълниците ABC, BCD, CDA, DAB е определена точка на Грифитс K_{ABC}, K_{BCD}, K_{CDA}, K_{DAB}. Как са разположени тези точки?

Експеримент. В хода на изследването трябва да се построят четири еднотипни обекта. Затова при работа с GeoGebra е подходящо да се създаде нов инструмент, който при въвеждане на три точки от k_{ABC} да извежда точката на Грифитс на триъгълника с върхове въведените точки (спрямо фиксирана права OM). Използването на такъв инструмент „олекотява“ геометричната конфигурация, позволява да се открои търсената зависимост и да се формулира хипотеза (фиг. 3).



Фиг. 3

Хипотеза. Ако $D \in k_{ABC}$, четирите точки на Грифитс, определени от точката M и триъгълниците ABC, BCD, CDA, DAB, лежат на една права.

Доказателство. При означенията, въведени на предишния етап, на K_{ABC}, K_{BCD}, K_{CDA}, K_{DAB} отговря съответно числото $k_1 = \dfrac{1}{2}(a+b+c-abc)$, $k_2 = \dfrac{1}{2}(b+c+d-bcd)$, $k_3 = \dfrac{1}{2}(c+d+a-cda)$, $k_4 = \dfrac{1}{2}(d+a+b-dab)$, където $D(d)$. Лесно се проверява, че

$$\frac{k_i - k_j}{\overline{k_i} - \overline{k_j}} = abcd, \quad i \neq j \in \{1, 2, 3, 4\},$$

което означава, че четирите точки на Грифитс, определени от вписания четириъгълник $ABCD$ и точката M, лежат на една права. Тази права се нарича права на Табов ([1], [5], [6], [7]).

Твърдението може да се докаже, като се използват свойствата на ортополюса ([5]), а в [6] то е обобщено с помощта на теоремата на Дезарг. Идеи за по-нататъшни изследвания и обобщения могат да се намерят в [6] и [7].

Разглеждането на темата в експериментален дух насърчава учениците към по-нататъшно самостоятелно изследване, резултатите от което могат да се оформят като реферат по геометрия.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Tabov. Four Colinear Griffiths Points. *Mathematics Magazine*, **68**, No 1 (1995), 61–64.
[2] Х. Хитов. Геометрия на триъгълника. София, Народна просвета, 1990.
[3] В. Прасолов. Задачи по планиметрии. Москва, МЦНМО, 2001.
[4] И. Тонов. Комплексни числа. София, Народна просвета, 1979.
[5] J.-L. Ayme. La Droite de Jordan Tabov ou four collinear Griffiths points, `http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr`
[6] K. Witczynski. On collinear Griffiths points. *Journal of Geometry*, **74** (2002), 157–159.
[7] K. Witczynski. On quadruples of Griffiths points. *Journal of Geometry*, **104** (2013), 395–398.

Невена Желязкова Събева-Колева
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: nsybeva@yahoo.com

FROM SIMSON LINE TO TABOV LINE: A ROUTE FOR EXPLORERS

Nevena Sabeva-Koleva

The paper represents pedagogical scenario in the style of experimental mathematics. A geometric configuration including Simson line, Griffiths point and Tabov line is considered. The geometrical objects are presented using dynamical geometric software. The student is involved in investigating the properties of these objects by experimenting, formulating hypothesis and finding theoretical proofs. The topic is suitable for 9-th grade students having adequate mathematical background.