МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

ИНДИЙСКИЯТ МАТЕМАТИК РАМАНУДЖАН

Иван Ланджев

1. Ранни години. Шриниваса Рамануджан Айенгар е роден на 22 декември 1887 г. в индийското градче Ероде, 250 мили югозападно от Мадрас (днес Шенай). Семейството му, макар със скромни доходи, е от кастата на брамините – каста на свещеници, учители и пазители на свещеното знание. Колониалните владетели на Индия създават добре структурирана система от училища в страната. На десетгодишна възраст Рамануджан вече изпъква сред връстниците си, получавайки най-високи резултати на стандартните изпити в своя окръг. Той става известен с изключителната си памет и способността си да казва наизуст дълги редици от цифри, например от десетичния запис на числото π.

По времето, когато Рамануджан е 16-годишен, в ръцете му попада книгата на Джордж Шубридж Кар *Synopsis of elementary results in pure mathematics*. Нито авторът, нито книгата могат да бъдат наречени гениални. В двата ѝ тома в рамките на 1055 страници тя представя математически резултати, номерирани от 1 до 6165, почти без доказателства и с минимални обяснения. Написана е от преподавател, готвещ студенти за математическия трайпос в Кембридж. Сбитият ѝ стил е много сходен с начина, по който Рамануджан ще излага по-късно своите резултати.

Математическите умения на Рамануджан не остават незабелязани и той получава стипендия за обучение в колеж. На 17-годишна възраст той постъпва в Държавния колеж в Кумбаконам. В колежа Рамануджан започва да учи математика и да прави собствени изследвания. Постепенно математиката се превръща в единственото му занимание и той пропада по всички останали предмети. Губи стипендията от 32 рупии, равняваща се на една и половина месечни заплати на баща му, и бяга от къщи, измъчван от угризения.

През 1906 г. той постъпва отново в колеж – Pachaiyappa's College в Мадрас. Индийската образователна система към тогавашния момент е такава, че за получаване на степен от колежа е необходимо да се положи изпит, който е администриран от Университета в Мадрас. През 1907 г. Рамануджан се явява и отново пропада. Така в годините от 1904 до 1909 г. Рамануджан е през по-голямата част от времето извън училище, без степен, без работа, без връзка с други математици, но с книгата на Кар и с математическите си занимания. Според великия Якоби „Младите математици трябва да бъдат хвърлени в студените води, за да се научат да плуват или да се удавят. Много от тях отлагат всичко, докато не овладеят нещата, направени от други и свързани с тяхната задача. В резултат малцина добиват желание за независими изследвания“. За пет години Рамануджан е сам в „студените води“. Той не получава наставления, окуражаване, пари. През тези години, той започва да записва резултатите си в бележници.[1] Първият достигнал до нас е изписан с особено зелено мастило и съдържа 200 страници, изпълнени с формули за хипергеометрични редове, верижни дроби, безкрайни суми . . .

През 1909 г. майка му урежда брак с 9-годишно момиче, Янаки, което заживява с него три години по-късно. Рамануджан започва да се издържа с преподаване на уроци по математика и много бързо става известен в Мадрас като математическо чудо. Започва да публикува в наскоро откритото списание *Journal of the Indian Mathematical Society*. Първата му статия, върху някои свойства на числата на Бернули, излиза през 1911 г. Когато опитите на приятелите му за издействане на стипендия пропадат, той започва да търси работа и намира такава като чиновник (или по-точно човек-калкулатор) на пристанището в Мадрас. Непосредственият му началник Наряана Айер се оказва човек с интереси в академичната математика и за-

[1]Ето една красива формула, която Рамануджан получил още като ученик:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}} = 3.$$

Рамануджан получава това по следния начин:

$$\begin{aligned} n(n+2) &= n\sqrt{1+(n+1)(n+3)} \\ &= n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)(n+4)}} \\ &= n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)(n+5)}}} \\ &= \ldots \\ &= n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\sqrt{1+\ldots}}}} \end{aligned}$$

Остава да положим $n = 1$ в безкрайния корен. Разбира се, Рамануджан не се интересува от законността на преминаването към безкраен израз.

почва да го подкрепя. Това продължава през целия живот на Рамануджан. Самият директор на порт Мадрас сър Франсиз Спринг е виден британски инженер и отчасти чрез него Рамануджан започва да общува с технически образовани британци в Мадрас.

Междувременно приятелите на Рамануджан продължават да го подкрепят и той започва да пише с тяхна помощ на британски математици. Не е известно със сигурност, на кого той пише най-напред. Малко преди смъртта си Литълууд ще спомене имената на Х. Ф. Бейкър и Е. У. Хобсън. Никой от двамата не е добър избор: Бейкър се занимава с алгебрична геометрия, а Хобсън с математически анализ. Интересите и на двамата са доста далеч от това, което прави Рамануджан. Никой от тях не отговаря. Така на 16 януари 1913 г. – Рамануджан изпраща писмо на Г. Х. Харди.

2. Кореспонденцията с Харди. Писмото[2] започва с думите: „Уважаеми господине, позволявам си да Ви се представя като чиновник в пристанищния тръст в Мадрас със заплата от 20 лири на година. Сега съм на около 23 години …“ Понататък остава впечатление, че авторът се опитва да изясни идеята за аналитично продължение, обобщавайки неща като функцията факториел върху нецели числа. Той пише (малко нескромно): „Всички мои изследвания се основават на тази идея и аз я развих толкова далеч, че местните математици не могат да разберат по-високия полет на моята мисъл.“ По-нататък четем мъглявото твърдение, че авторът разполага с метод за преброяване на простите числа до дадено място и писмото завършва с думите: „Аз съм беден, но ако считате, че тук има нещо ценно, бих желал да публикувате моите теореми, … Искам да ме извините за грижите, които Ви създавам, и оставам, Уважаеми Господине, искрено Ваш, Ш. Рамануджан.“

---

[2] Dear Sir, I beg to introduce myself to you as a clerk in the Accounts Department of the Port Trust Office at Madras on a salary of only £20 per annum. I am now about 23 years of age. I have had no University education but I have undergone the ordinary school course. After leaving school I have been employing the spare time at my disposal to work at Mathematics. I have not trodden through the conventional regular course which is followed in a University course, but I am striking out a new path for myself. I have made a special investigation of divergent series in general and the results I get are termed by the local mathematicians as "startling".

Just as in elementary mathematics you give a meaning to a^n when n is negative and fractional to conform to the law which holds when n is a positive integer, similarly the whole of my investigations proceed on giving a meaning to Eulerian Second Integral for all values of n. My friends who have gone through the regular course of University education tell me that $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = \Gamma(n)$ is true only when n is positive. They say that this integral relation is not true when n is negative. Supposing this is true only for positive values of n and also supposing the definition $n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$ to be universally true, I have given meanings to these integrals and under the conditions I state the integral is true for all values of n negative and fractional. My whole investigations are based upon this and I have been developing this to a remarkable extent so much so that the local mathematicians are not able to understand me in my higher flights.

Very recently I came across a tract published by you styled *Orders of Infinity* in page 36 of which I find a statement that no definite expression has been as yet found for the number of prime numbers less than any given number. I have found an expression which very nearly approximates to the real result, the error being negligible. I would request you to go through the enclosed papers. Being poor, if you are convinced that there is anything of value I would like to have my theorems published. I have not given the actual investigations nor the expressions that I get but I have indicated the lines on which I proceed. Being inexperienced I would very highly value any advice you give me. Requesting to be excused for the trouble I give you.

I remain, Dear Sir, Yours truly, S. Ramanujan

Следват девет страници (поне две страници са загубени), в които са изложени над 120 математически резултата. Някои равенства изглеждат абсурдни, като това, че сумата на естествените числа е (може да се мисли) равна на $-1/12$:[3]

$$1+2+3+4+5+6+\ldots=-\frac{1}{12}.$$

или пък, че

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots=\frac{1}{120}.$$

Има и екзотични неща – страници, изпълнени с формули като тези:

$$\begin{aligned}(1)\qquad &\frac{1}{1^3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}\cdot\frac{1}{2^4}+\ldots\\ &\quad=\frac{1}{6}(\log 2)^3-\frac{\pi^2}{12}\log 2+\left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}=\ldots\right)\end{aligned}$$

$$(2)\qquad 1+9\left(\frac{1}{4}\right)^4+17\left(\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}\right)^4+25\left(\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}\right)^4+\ldots=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\left(\Gamma(\frac{3}{4})\right)^2}$$

$$(3)\qquad 1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-\ldots=\frac{2}{\pi}$$

$$(4)\qquad \frac{1^{13}}{e^{2\pi}-1}+\frac{2^{13}}{e^{4\pi}-1}+\frac{3^{13}}{e^{6\pi}-1}+\ldots=\frac{1}{24}$$

$$(5)\qquad \frac{\coth\pi}{1^7}+\frac{\coth 2\pi}{2^7}+\frac{\coth 3\pi}{3^7}+\ldots=\frac{19\pi^7}{56700}$$

Каква била реакцията на Харди? Най-напред той се посъветвал с Литълууд. Известни ли са тези равенства? Или са съвсем погрешни? Някои от тях са разпознати

[3] Тук Рамануджан пресмята стойността на ζ-функцията в -1. Започваме с функционалното уравнение за ζ-функцията

$$(*)\qquad \zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s),$$

където

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)^z}{z(z+1)\ldots(z+n)},\quad z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}.$$

Полагаме $s=2$ в $(*)$ и като използваме $\Gamma(2)=1$ получаваме

$$\zeta(-1)=-\frac{\zeta(2)}{2\pi^2}.$$

Добре известно е, че

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Оттук

$$\zeta(-1)=1+2+3+\ldots=-\frac{1}{2\pi^2}\frac{\pi^2}{6}=-\frac{1}{12}.$$

и са верни. Други са съвсем неизвестни. По-късно той прави прочутата забележка, че тези формули „трябва да са верни, защото ако не са, то никой не би имал въображението да ги открие“.

Бъртран Ръсел пише, че в деня след получаване на писмото намира „Харди и Литълууд в състояние на дива възбуда, защото считат, че са открили втори Нютън – чиновник в Мадрас, печелещ 20 лири на година“. Харди показва писмото от Рамануджан и дори отправя запитване до държавния департамент, занимаващ се с Индия. Отнема му седмица да отговори, започвайки с премерено чувство на възхищение: „Бях извънредно заинтересован от Вашето писмо и теоремите, които формулирате“. И продължава: „Все пак ще разберете, че преди да мога да оценя правилно стойността на това, което сте направили, е съществено да видя доказателства на някои от Вашите твърдения“. Това е важно – за Харди не е достатъчно да знае, той иска да бъде убеден, да му се разкаже приказка, да се обясни, защо това, което се твърди, е вярно. Разбира се, Харди би могъл сам да се опита да докаже, но за него е важно да разбере, как мисли Рамаунджан и още по-важно – от какъв алибъръ е като математик.

Резултатите на Рамануджан са разделени в три класа: вече известни, нови и интересни, но може би не важни, и накрая – нови и потенциално важни. Един от резултатите е поставен веднага в третата група – твърдението за броя на простите числа. Но Харди добавя, че „почти всичко зависи от строгостта на методите“. Харди очевидно е направил своето малко проучване, защото писмото му се позовава на статията на Рамануджан за числата на Бернули. Но казва само: „Надявам се да получа отговор от Вас колкото може по-скоро“.

Рамануджан отговаря наистина бързо и писмото му е забележително. Започва с това, че е очаквал отговор, подобен на този от „лондонския професор“ (Хил), предупреждаващ го да не попада в „капана на разходящите редове“. На желанието на Харди за доказателства той откликва с думите: „Ако Ви кажа методите си, то със сигурност ще се присъедините към лондонския професор ... ако Ви кажа за това[4], то ще помислите, че съм за лудницата ... пиша тези редове, за да Ви убедя, че не можете да разберете методите ми само по няколко думи“. Той пише още, че основната му цел е някой да провери резултатите му така, че да може да получи стипендия, защото „аз вече съм полугладен човек; за да запазя мозъка си, имам нужда от храна“. Изненадващо, Рамануджан се радва най-много на резултатите, които Харди поставя в първата група – тези, които са вече известни – „защото резултатите ми са проверени, макар аргументацията ми да има плитки основи“. С други думи, Рамануджан не е сигурен, че резултатите му са верни и е радостен, че това е така.

Рамануджан не дава обяснение как са получени тези резултати. Със сигурност той използва смес от традиционни математически доказателства, емпирични данни, получени от пресмятания, и много, много интуиция. Той започва кореспонденция по детайлите от доказателствата, които бил в състояние да предостави. Харди и Литълууд изглежда имат намерение да организират усилията му. Те продължават да се чудят дали Рамануджан е „един Ойлер“ или просто „един Якоби“. Литълууд пише: „нещата, отнасящи се до простите числа, са грешни“ и обяснява как Рама-

[4]резултата $1 + 2 + 3 + \ldots = -1/12$.

нуджан неправилно приел, че Римановата ζ-функция няма нули извън реалната ос, докато всъщност тя има безбройно много. Това е и същността на хипотезата на Риман.

Харди и Литълууд нямат точен модел за начина на мислене на Рамануджан. Литълууд дори предположил, че Рамануджан не представя доказателства, защото се страхува да не му ги откраднат. Крадeнето на резултати в онези дни било проблем в академичните среди, точно както и днес. Рамануджан казва, че от това допускане го е заболяло и уверява, че не е загрижен за това, дали методът му може да бъде използван от други. Той казва още, че е открил този метод преди осем години, но не бил намерил човек, който да го оцени. Сега бил готов да предостави без резерви малкото, което има.

3. В Индия или Англия – това е въпросът. В първите месеци на 1913 г. Харди и Рамануджан разменят писма, в които Рамануджан описва свои резултати. Харди критикува казаното от него и настоява за доказателства и традиционно математическо описание. Следва пауза и през декември 1913 г. Харди пише отново, за да обясни, че най-амбициозните резултати на Рамануджан, тези за разпределението на простите числа, са със сигурност грешни. Харди пише: „Теорията за простите числа е изпълнена с капани, заобикалянето на които изисква най-пълно обучение в модерните методи“. Той добавя и, че ако Рамануджан успее все пак да докаже резултатите си, то това ще бъде „може би най-забележителното постижение в историята на математиката“.

Междувременно още преди да отговори на първото писмо на Рамануджан, Харди започва да проучва възможността да го доведе в Кеймбридж. През януари 1914 г. в Мадрас пристига младият математик Ерик Харолд Невил[5]. Той изнася цикъл от лекции, но, още по-важно – донася съобщение, че Харди е (по думите на Рамануджан) „много заинтересован да го вземе“. Още през февруари предната година Рамануджан е разговарял със своя наставник, „много ортодоксален брамин, имащ скрупули към пътуването в чужбина“, който е казал, че Рамануджан не бива да заминава. Самият Рамануджан също има съмнения, подсилвани от това, че там може би ще трябва да полага изпити. Невил разсейва всичките му съмнения, като обяснява, че парите няма да са проблем, че английският му е достатъчно добър, че няма да се налага да държи изпити и че може да остане вегетарианец и в Англия.

Харди предполага първоначално, че няма да има бюрокротични трудности да доведе Рамануджан в Англия. Но не става така. Колежът „Тринити“ (Trinity College) не е готов да осигури финансиране. Харди и Литълууд предлагат да дадат част от парите сами. Невил пише до Университета на Мадрас, че „откриването на гения на Рамануджан обещава да бъде най-интересното събитие на нашето време в математическия свят“ и предлага Университетът да участва със средства. Приятелите на Рамануджан в Индия издействат помощ от 75 рупии (5 лири) на месец от 1 май 1913 г. за период от две години. Те го подтикват да кандидатства за стипендия за магистратура в Университета на Мадрас. Хората от университетската администрация настояват на това, че правилниците не разрешават да се даде стипендия на човек като Рамануджан, който няма университетска степен. Но те подсказват и решение. В раздел XV на закона за устройство и раздел 3 на закона за Индийските univер-

[5] E. H. Neville (1889–1961) е известен и като „човекът, убедил Рамануджан да замине за Англия“.

ситети от 1904 г. се разрешава даването на стипендия от Държавния департамент за образование за изнасяне на лекции по заместване, при условие, че е изразено съгласие от губернатора на Форт Сейнт Джордж. Така нещата са придвижени и в рамките само на няколко седмици Рамануджан получава двугодишна стипендия с единственото изискване да представя отчет на всеки три месеца.

На 17 март 1914 г. след изпращане, включващо някои местни знаменитости, Рамануджан се качва на борда на *Неваса*, който, минавайки през Коломбо, Аден, Порт Саид, Генуа и Плимут, хвърля котва в устието на Темза на 14 април. Посреща го Невил. Отсядат в Южен Кенсингтън и прекарват няколко дни в Лондон. На 18 април Рамануджан пристига в Кеймбридж и индийските вестници гордо съобщават, че „мистър Рамануджан от Мадрас, чиито работи по висша математика предизвикаха възхищение в Кеймбридж, вече е в колежа „Тринити““.

4. Първи години в Кеймбридж. При пристигането си в Кеймбридж Рамануджан е малко плах, но ентусиазиран и жаден за знания. Може да говори на различни теми, шегува се, понякога за своя сметка, винаги е учтив и се опитва да следва местните обичаи. Родният му език е тамилски, но при пристигането му в Кеймбридж английският му е безупречен. Физически е описван като набит, но всички, които са го виждали, не пропускат да отбележат особения блясък в очите му. Рамануджан не се заобикаля с вещи; в стаята му има само няколко книги и статии. Разумен е за практическите неща като намиране на продукти за вегетарианските му ястия.

Рамануджан е финансово осигурен в Кеймбридж. Той получава годишна стипендия от 250 лири от Мадрас и 60 лири от Тринити. При това без никакви задължения, свързани с преподаване в колежа. За сравнение през 1914 г. среден работник в Англия има доход от 75 лири на година. Прагът за плащане на данъци по това време е 160 лири на година и се достига от по-малко от 7% от населението. Рамануджан праща 50 лири в Индия, за да подкрепя семейството си.

Рамануджан започва работа с Харди и Литълууд. С Литълууд се срещат веднъж седмично, а с Харди – почти всеки ден. Рамануджан работи здраво и е много продуктивен. Той не идва в Кеймбридж да слуша лекции, но, пристигайки навреме за Великденския срок, той започва да посещава някои от тях. Някои са лекции на самия Харди, другите са на Артър Бери, преподавател от Кралския колеж (King's College London), който към този момент е малко над 50-годишен. От това време се е запазила следната случка. Една сутрин Бери пише по дъската, извеждайки някакви формули, когато вдига поглед и среща очите на Рамануджан, които сияят от възхищение. Дали господинът следи лекцията, информира се Бери, на което Рамануджан кима с глава. А дали би добавил нещо. В този момент Рамануджан става, отива до дъската и изписва няколко резултата, които Бери не е доказал до момента и въобще, както казва Бери по-късно, Рамануджан няма откъде да знае.

На 28 юни 1914 г., два и половина месеца след пристигането на Рамануджан в Англия, е извършен атентат срещу ерцхерцог Франц Фердинанд и на 28 юли 1914 г. започва Първата световна война. Това веднага се отразява на живота в Кеймбридж. Много студенти са мобилизирани. Същото се случва и с Литълууд, който започва да работи по изготвянето на балистични таблици за противовъздушните оръдия.[6]

[6] От това време е и забележката на Харди: "Even Littlewood could not make ballistics respectable, and if he could not, who can?"

Макар да не подкрепя войната, Харди също се записва доброволец, но е отхвърлен по медицински причини.

Рамануджан описва войната в писмо до майка си: „Те летят с аероплани на голяма височина, бомбардират градовете и ги разрушават. Щом се появят вражески самолети, нашите, които чакат на земята, се издигат и се отправят към тях, причинявайки разрушение и смърт“. Въпреки всичко Рамануджан продължава заниманията си с математика, като обяснява на майка си, че войната се води далеч, толкова далеч, колкото е „Рангун от Мадрас“. Появяват се и практически трудности като липсата на зеленчуци, което кара Рамануджан да помоли приятел в Индия да му изпрати с колет тамаринди и кокосово масло. Но по-важно за него е, че заради войната професорите в Кеймбридж са загубили интерес към математиката.

Рамануджан пише на приятел, че откакто е в Англия той изучава „техните методи“ и се опитва да публикува лесно и без забавяне. Образованието на Рамануджан завършва с края на *Synopsis*-а на Кар, а той не включва нищо, направено след 1850 г. Но Харди вече държи в ръце бележника на Рамануджан и вярва, че $1/3$ от резултатите в него са „нови и спиращи дъха“. По-късно Уотсън ще промени тази оценка на $2/3$. Много си струва да бъде публикувано, разбира се след редактиране, да се оформят резултатите, да се изберат правилните означения. „Всички ръкописи на Рамануджан минаха през ръцете ми“, ще каже по-късно Харди. „По-ранните пренаписах изцяло, но не добавих нищо към математиката.“ Рамануджан, пише Харди, „бе готов почти до абсурд да признае дори и най-малката помощ“.

5. Публикационна дейност. През 1914 г. излиза от печат само една статия в *Quarterly Journal of Mathematics* – “Modular equations and approximations to Pi”. Но в следващата година Рамануджан публикува много повече. Тогава излиза и дълга статия със заглавие “Highly Composite Numbers”, отнасяща се до тези естествени n, за които $d(n) > d(m)$, за всяко $m < n$. Понятието е въведено от Рамануджан, но може да е било известно и на Платон, който отбелязва, че идеалният брой жители в един град е 5040, тъй като това число има повече делители от всяко предхождащо го. Всъщност 5040 е деветнадесетото *високо съставно число.*

През следващите няколко години Рамануджан продължава да пише редица статии, които биват публикувани въпреки войната. Една от забележителните му статии (Asymptotic formulae in combinatory analysis, Proc. London Math. Soc, Ser. 2, **17**(1918), 75–115) е написана заедно с Харди и се отнася до функцията $p(n)$ – броя на разбиванията на естественото число n. Статията е класически пример на съчетаване на асимптотични с точни резултати. Тя започва със забележителната оценка

$$p(n) \sim P(n) = \frac{1}{4\pi\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}.$$

По-нататък в нея се развиват идеи на Рамануджан, които той има още в Индия, за да се получи още по-точна формула, в която старшият член е

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \left(\frac{\exp\left(\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{n-\frac{1}{24}}\right)}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}} \right).$$

Харди и Рамануджан доказват, че от някакво място нататък грешката е по-малка от $1/2$, така че резултатът им е точен, закръгляйки до най-близкото цяло число.

6. Последни години. През май 1917 г. се появява проблем – Рамануджан се разболява. Сега се счита, че най-вероятната причина е инфекция на черния дроб, предизвикана от някакъв паразит, донесен от Индия. Рамануджан ходи от лекар на лекар и от болница в болница. Той не вярва на това, което му говорят, а и лекарите не му помагат. През някои месеци е добре и работи, през други е на легло. Той се депресира. През главата му минават мисли за самоубийство. Майка му в Индия забранява на Янаки да се свързва с него, вероятно с идеята да не го отвлича от работата му. Това не помага. Харди се опитва да облекчи Рамануджан. Говори с лекарите и провежда сам общите математически изследвания. Един лекар му казва, че причина за заболяването е „някакъв малко известен микроорганизъм, който е недостатъчно добре изследван в настоящия момент“. Харди пише: „Рамануджан е силно суеверен и е ужасно трудно да бъде принуден да се погрижи за себе си“. От това време е и прочутата история с числото 1729. При един от престоите си в Пътни Рамануджан е посетен от Харди, който споменава, че таксито, с което е пристигнал, има доста неинтересния номер 1729. На което Рамануджан отговаря: „Не, Харди, това е много интересно число. Това е най-малкото естествено число, което може да се представи като сума на два куба по два различни начина“. [7] Харди пита, дали Рамануджан знае пример и за четвъртите степени и след момент замисляне Рамануджан отговаря отрицателно, но добавя, че първото такова число трябва да е много голямо[8].

В тези години математическата репутация на Рамануджан расте. Той е избран за член на Кралското общество (Fellow of the Royal Society). Между подкрепилите го са Хобсън и Бейкър – адресатите на първите му писма, останали без отговор. През октомври 1918 г. Рамануджан е избран и за Fellow of Trinity College, което осигурява и допълнителна финансова подкрепа. Месец по късно Първата световна война приключва, а заедно с нея и заплахата от немски подводници. Пътят към Индия е открит.

В началото на 1919 г. здравето на Рамануджан се подобрява достатъчно, че да предприеме пътуване до Индия. Уредена му е позиция в Университета в Мадрас. Рамануджан пише благодарствено писмо до ректора, извинявайки се за това, че болестта му не му е позволила да работи достатъчно интензивно в последно време. На 13 март 1919 г. Рамануджан пристига в Индия, известен и почитан, но и много болен. Той дори не може да започне работа в Университета. След три месеца в Мадрас той се връща в Кумбаконам. През цялото време продължава да твори математика. На 20 януари 1920 г. изпраща на Харди забележително писмо относно нов клас θ-функции (*mock theta functions*). Живее скромно, игнорирайки и малкото, което медицината може да направи за него. Умира на 26 април 1920 г. на 32-годишна възраст, три дни след последния запис в бележника си.

[7] Наистина $1729 = 1^3+12^3 = 9^3+10^3$. Сега бихме казали, че това е третото число на Кармайкъл. Едно съставно число m се нарича число на Кармайкъл, ако сравнението $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$ е изпълнено за всяко a, което е взаимнопросто с m. През 1994 г. беше доказано, че съществуват безброй много числа на Кармайкъл.

[8] Първото такова число е посочено от Ойлер:

$$635318657 = 158^4 + 59^4 = 134^4 + 133^4.$$

7. Наследството на Рамануджан. От началото на заниманията си с математика Рамануджан записва резултатите си в бележници с твърди корици, като до публикуване достига съвсем малка част от тях. След смъртта на Рамануджан бележниците му и негови непубликувани резултати са предадени в Университета на Мадрас от вдовицата му Янаки Амал. На 30.08.1923 г. служител на Университета изпраща на Харди всички ръкописи на Рамануджан[9]. Харди започва да организира публикуването на всички резултати от бележниците, които били около 3000. След 1930 г. в това се включват още математици. Един от тях е професорът от Бирмингам Г. Н. Уотсън, който посвещава на бележниците над 10 години и над 30 статии. Някъде между 1934 и 1947 г. Харди предава на Уотсън ръкописи на Рамануджан, между които е и т. нар. „загубен бележник“, но Уотсън може би не му е обърнал внимание (Уотсън разглежда като *неразрешени* въпроси, на които има отговор в бележниците). През 1940 г. Харди предава всички писма от Рамануджан на Университетската библиотека в Кеймбридж (Wren Library), но между тях не е първото писмо на Рамануджан от 1913 г. Така единственото, което имаме сега, е преписът на Харди, публикуван по-късно. След смъртта на Уотсън загубеният бележник е открит случайно сред документите му. Подробно изследване на бележниците на Рамануджан е направено в пет тома от Брус Бернт (Bruce Berndt), а изгубеният бележник разгледан в други три тома с автори Джордж Андрюс (George Andrews) и Брус Бернт.

В момента на смъртта на Рамануджан Янаки Амал е само на 21 години. Както бил обичаят, тя никога повече не се омъжва. Живее скромно, издържайки се с шивачество. През 1950 г. осиновява сина на починал неин приятел. Към 1960 г. Рамануджан се превръща в нещо като национален герой на Индия и тя започва да получава различни почести. През годините я посещават математици от цял свят и тя им предава вещи на Рамануджан. Между тях е и паспортната му снимка, която днес е най-известният негов образ. Живее дълго и умира през 1994 г., надживявайки мъжа си със 73 години.

ЛИТЕРАТУРА

[1] G. E. Andrews, B. C. Berndt. Ramanujan's Lost Notebook. New York-Heidelberg-Dordrecht-London, Springer, Part I 2005, Part II 2009, Part III 2012, Part IV 2013.

[2] B. C. Berndt. Ramanujan's Notebooks. Springer, Part I 1985, Part II 1999, Part III 2004, Part IV 1993, Part V 2005.

[3] G. H. Hardy. The Indian Mathematician Ramanujan. *American Mathematical Monthly* **44**, sl3 (1937), 137–155.

[4] G. H. Hardy. The mathematician's apology. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1940.

[5] R. Kangiel. The man who knew infinity. Washington Square Press, 1991.

[9] Някъде по това време при Харди пристига Дьорд Пойа. Той заема от Харди копие от бележниците на Рамануджан, нищо от които още не е публикувано. След няколко дни Пойа се връща в състояние близко до паника и ги хвърля обратно на Харди. Не, той не ги иска. Не ги иска, защото веднъж хванат в паяжината на магическите теореми на Рамануджан, човек би прекарал остатъка от живота си в опит да ги докаже и никога не би открил нещо свое ...

Иван Ланджев
Нов български университет
ул. „Монтевидео“ 21
1618 София, България
и
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. „Акад Г. Бончев“ бл. 8
1113 София, България
e-mail: ivan@math.bas.bg