МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

ИЗПОЛЗВАНЕ НА ПОМОЩНИТЕ ФАЙЛОВЕ В ОНЛАЙН СЪСТЕЗАНИЕТО „VIVA МАТЕМАТИКА С КОМПЮТЪР“*

Петър Кендеров, Тони Чехларова

Разглежда се една от спецификите на онлайн състезанието „VIVA Математика с компютър“, което се организира от 2014 г. от Института по математика и информатика при Българска академия на науките, Съюза на математиците в България и телекомуникационната компания VIVACOM. Задачите, давани на това състезание, често се съпровождат от файлове на *GeoGebra*, които подпомагат изследването и решаването на съответната задача. В статията е показано с конкретни примери, как тези файлове допринасят за едновременното развитие и на дигиталната и на математическата компетентност на учащите се. Тези файлове са и удобен инструмент за популяризиране сред ученици, учители и родители на образователни ресурси, изработени със специализиран динамичен софтуер.

Въведение. Онлайн състезанието „VIVA Математика с компютър“ се организира от Института по математика и информатика на Българска академия на науките, Съюза на математиците в България и телекомуникационна компания VIVACOM [1]. Основните цели още от самото му основаване бяха: едновременно развитие на дигиталната и математическата компетентности и популяризиране сред ученици, учители и родители на образователни ресурси, разработени със специализиран динамичен софтуер.

Една от характерните особености на състезанието е, че към голяма част от задачите се предоставят помощни файлове (изработени с безплатната за ползване система *GeoGebra* [2]), които подпомагат изследването и решаването на съответната задача. Тези файлове обикновено не са във вид „готов за пряка употреба“. Необходимо е нещо в тях да бъде променено и съобразено с данните на съответната задача. Обикновено трябва да се променят стойности – с плъзгач, да се премести обект, например точка, да се въведат стойности на параметър и др. Понякога се налага да се добавят нови команди. Във всеки случай е необходимо ученикът да разбере какво всъщност прави помощният файл, каква е логиката зад него и как той действа. Това развива алгоритмичното мислене и става основа за активно използване на

*Изследването е реализирано с подкрепата на Националната научна програма „Информационни и комуникационни технологии за единен цифров пазар в науката, образованието и сигурността (ИКТвНОС)“, финансирана от МОН, и проект „Изследване на концептуалното знание и наличието на грешни представи в часовете по математика и природни науки“ между БАН и МАНИ.

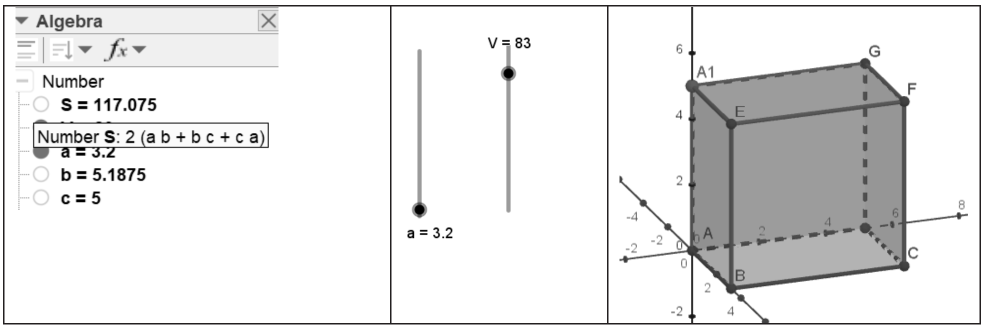
Ключови думи: онлайн състезание, дигитална компетентност, математическа компетентност, образователни ресурси.

дигиталните технологии, включително и до степен на създаване на собствени дигитални ресурси. Така неусетно се усвояват и възможностите на софтуера. Освен това се прониква по-дълбоко и в математическата същност на задачата. Участниците могат да използват и други изчислителни среди и средства (не само *GeoGebra*), за да решат задачата. Тъй като от значение при равен брой точки е времето за работа, участникът трябва да прецени с какво помощно средство ще си служи при решаване на задачата. Изборът на подходящ инструмент за решаване на дадена задача също е част от дигиталната компетентност.

Видове отговори на задачите в онлайн състезание „VIVA Математика с компютър“. Според вида на отговора задачите в състезание „VIVA Математика с компютър“ се разделят на три вида: с възможност за избиране на точно един от n дадени отговора; с възможност за избиране на k от n дадени отговора, където $k \leq n$; със свободен отговор, който е число в десетичен запис, обикновено с посочена точност [1]. Оценяването на свободните отговори е тип мишена [3], т.е. максимален брой точки се получават за верен отговор, а когато отговорът е приблизително верен, броят на получените точки съответства на близостта на дадения отговор до верния. Помощни файлове може да има към задачи и от трите вида. Тук ще илюстрираме казаното по-горе с конкретни примери на задачи, давани на състезание „VIVA Математика с компютър“.

Модификация на помощни файлове.

Задача 1. (Фиг. 1.) Намерете възможно най-малката пълна повърхнина на правоъгълен паралелепипед с обем 83 cm^3, ако единият му ръб е с дължина 5 cm. Запишете отговора в cm^2 с точност до стотните.



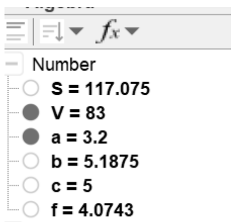
Фиг. 1. Задача 10 от Работния лист за 8. клас, дадена на състезанието през декември 2019 г.
http://course.cabinet.bg/index.php?contenttype=publicview{\&}testidselectedbyuser=196

Можем да считаме, че $c = 5$. Следователно, на всяко положително число a съответства правоъгълен паралелепипед с дължина a, ширина $b = \dfrac{83}{5a}$ и височина $c = 5$. Задачата се състои в това, да намерим такова a, за което пълната повърхнина $S = 2\,(ab + bc + ca)$ на съответстващия на това a правоъгълен паралелепипед е най-малка. Помощният файл към тази задача е достъпен посредством връзката под фиг. 1. Самата фигура показва един изглед от него. Вижда се плъзгач за обема

V на правоъгълния паралелепипед и плъзгач за числото a. Очаква се участникът сам да постави плъзгача за V в позиция $V = 83$. Тогава помощният файл пресмята околната повърхнина S по горната формула за всяко отделно число $a > 0$. С движение на плъзгача за a от долния край – нагоре участникът в състезанието вижда, че стойността на S първоначално намалява, достига някаква минимална стойност, а после започва да расте. Намирането на минималната стойност на S може да стане или с внимателно боравене с плъзгача, или като се използва командата

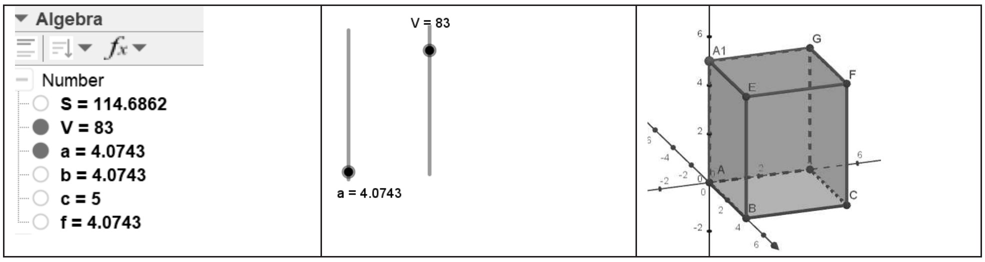
```
Minimize(<Dependent Number>, <Free Number>)
```

за намиране на минимум на величина (в случая S), която зависи от друга величина (в случая – от числото a). За целта е необходимо първо да се изведе на екрана „Командният ред“ („Поле за въвеждане на команди“ от менюто на фиг. 10), да се запише в него командата `Minimize(S,a)`, след което тя да се изпълни (с щракване върху клавиша „Enter“). Като резултат *GeoGebra* вписва в алгебричния прозорец число, при което S приема минимална стойност и дава име на това число. На фиг. 2 това е числото $f = 4.0743$.



Фиг. 2. Минимизиране с команда

Ако сега се изпълни командата $a = f$, *GeoGebra* ще пресметне и впише в първия ред на алгебричния прозорец минималната пълна повърхнина $S = 114.6862$ и ще изобрази съответния на числото $a = f = 4.0743$ паралелепипед в прозореца за тримерна графика (фиг. 3). Като отговор на задачата следва да се впише 114.69.

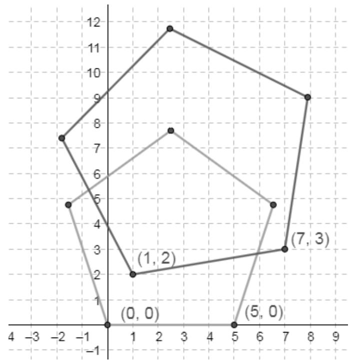


Фиг. 3. Визуализация на решението

От участвалите 199 ученици в тази група 11,6% са получили точен отговор, 9,9% – с точност до цялата част, 10,1% – с точност 2 единици. Независимо от това, че 35,2% не са посочили отговор, като имаме предвид големия брой на тези, които за първи път участват в състезанието, считаме, че е висок процентът на решилите задачата с достатъчно добра точност. Практиката показва, че след първото участие стремежът към повишаване на точността на свободните отговори нараства.

Помощният файл към която и да е задача се предоставя в два формата: а) като .html-файл, който се отваря директно в Работния лист с някой от обичайните браузери и б) като .ggb-файл (*GeoGebra* файл), който може да се свали на използваното устройство и да се отвори „резидентно“ (ако системата *GeoGebra* вече е инсталирана на устройството). Във втория случай е по-лесно да се правят модификации на файла и да се постига висока точност на отговора. Това обаче е за сметка на известна загуба на време (за свалянето и отварянето на .ggb-файла).

Задача 2. (Фиг. 4.) Намерете лицето на сечението на двата правилни петоъгълника. Запишете с точност до стотните.

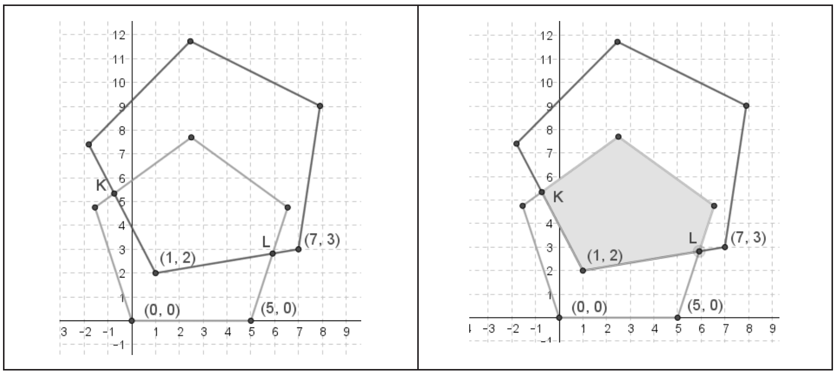


Фиг. 4. Задача 2 от Работния лист за 10. клас, дадена на състезанието през септември 2017 г.
`http://course.cabinet.bg/index.php?contenttype=publicview{\&}testidselectedbyuser=109`

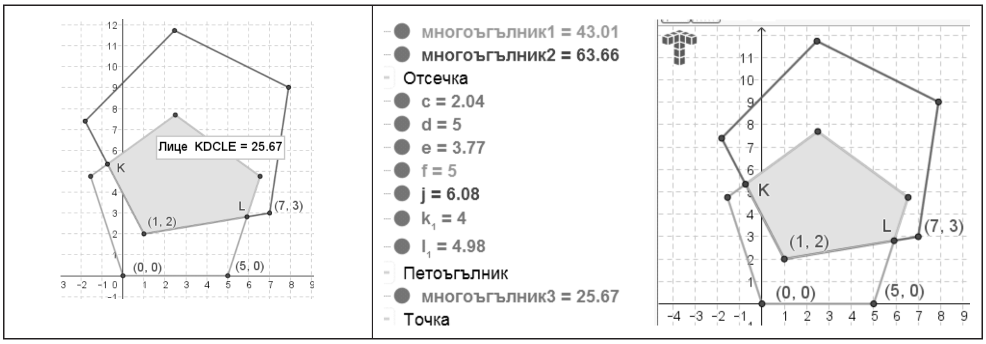
И тук помощният файл е достъпен чрез връзката под фиг. 4. Той просто изобразява на екрана двата дадени правилни многоъгълника. Сечението им също е петоъгълник, като три от неговите върхове са вече известни. Очаква се участниците в състезанието да намерят останалите два върха, като построят пресечните точки K и L (фиг. 5) на две двойки отсечки. За целта могат да използват бутона  за пресичане на обекти.

Лицето на сечението може да се намери чрез активиране на бутона за лице на фигура  или на бутона  за построяване на многоъгълник, последвано от обхождане на върховете с щракване върху всеки от тях. В първия случай лицето на сечението е изведено в геометричния прозорец (лявата част на фиг. 6), а във втория е записано в последния ред на алгебричния прозорец като името **многоъгълник3** $=$ **25.67** (дясната част на фиг. 6).

Решавалите задачата са участници във втори кръг, до който се допускат добре представилите се в първи кръг състезатели. Те вече имат опит и се стремят да постигнат исканата точност. Всичките 5 участници са се ориентирали добре и са използвали правилно предоставения помощен файл. Получили са точния отговор и съответно максималния брой точки за тази задача. В стандартните тестове такъв резултат би означавал, че задачата не е подходяща за състезанието, защото с нея



Фиг. 5. Допълнителни построения



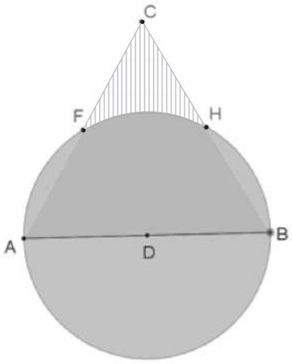
Фиг. 6. Извеждане на числов резултат

и без нея класирането ще е едно и също. В това състезание обаче е от значение и времето, за което е намерено решението на 10-те задачи. При равен брой точки, предимство има онзи състезател, който по-рано е подал попълнения с отговори Работен лист.

Задача 3. (Фиг. 7.) Даден е равностранен триъгълник ABC със страна 7 cm. Построен е кръг с диаметър AB. Намерете лицето на частта от триъгълника ABC, която е извън кръга (на фигурата тази част е защрихована вертикално) [4].

Очаква се участниците да намерят, например с бутона , пресечните точки H и F на триъгълника и окръжността. Средата D на отсечката AB може да се намери с бутона  за среда на отсечка. След това, с активиране на бутона 

и избиране (с щракване върху тях) на точките D, H, C, F, системата *GeoGebra* пресмята лицето на многоъгълника DHCF и го записва в алгебричния прозорец като **q1 = 10.60881**. Накрая, чрез бутона  за кръгов сектор и избиране на точките D, H и F (в този ред – по посока обратна на часовата стрелка) системата *GeoGebra* пресмята лицето на кръговия сектор DHF и го записва в алгебричния прозорец



Фиг. 7. Задача 8 от Работния лист за 9. клас, дадена на състезание през декември 2015 г.
`http://course.cabinet.bg/index.php?contenttype=publicview{\&}testidselectedbyuser=60`

като е = 6,41409. Разликата $q1 - e$ е точно лицето на частта от триъгълника ABC, която е извън кръга. Това лице е записано в алгебричния прозорец като = 4.19473. Ако в условието на задачата е указано, че се очаква да въведем отговора с точност до стотните, за отговор на задачата следва да се запише числото 4.19.

От решавалите тази задача (87 ученици) 13,8% са получили точен отговор, а още 16,1% – отговор с достатъчно добра точност, показваща, че са се ориентирали добре в използването на файла. Ще обърнем внимание, че продължителността на състезанието, което включва 10 задачи, е 1 час. Освен това стремежът е не само за справяне със задачите, а и за по-бързо подаване на решенията.

Задача 4. (Фиг. 8.)

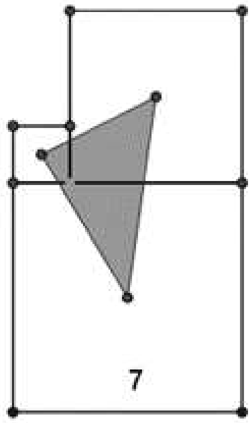
На една от страните на квадрат 7×7 cm са построени външно два квадрата, както на фигурата. Центровете на трите квадрата са върхове на триъгълник. Каква е най-малката възможна обиколка на такъв триъгълник [5]?

В предоставения помощен файл дължината на страната на големия квадрат не е 7, а е 2. Очаква се участниците да променят тази дължина от 2 на 7, например с преместване на връх. Освен това, трябва да построят центровете на трите квадрата. Това може да стане по няколко начина, като използваме свойства на квадрата и възможностите на софтуера. Като имаме предвид, че средата на всеки от диагоналите на квадрат съвпада с центъра му, можем да активираме бутона за намиране на среда на отсечка  и след това да щракнем последователно върху краищата на кой да е от диагоналите на квадрата (фиг. 9).

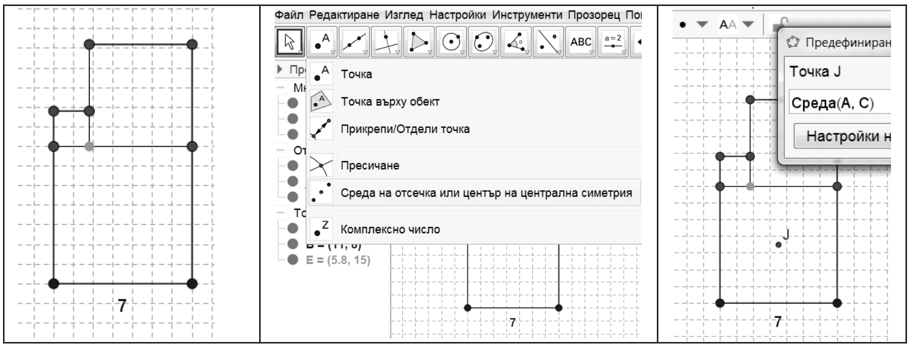
Същото се повтаря и с останалите два квадрата. Друга възможност е да се използва командата за център на правилен многоъгълник **Медицентър (<Многоъгълник>).**

За целта първо извеждаме на екрана Командния ред (полето за въвеждане на команди фиг. 10) и в него записваме **Медицентър(многоъгълник2)**.

Забелязваме, че при движение на *зелената*[1] точка от единия връх на големия квадрат към другия първоначално обиколката на триъгълника с върхове центровете на трите квадрата намалява, след това нараства (фиг. 11). Търсената точка е средата



Фиг. 8. Задача 10 от Работния лист на тема за 5.–6. клас, дадена на състезанието през декември 2018 г.
http://course.cabinet.bg/index.php?contenttype=publicview{\&}testidselectedbyuser=138



Фиг. 9. Построяване на център на квадрат

на отсечката, по която се движи зелената точка.

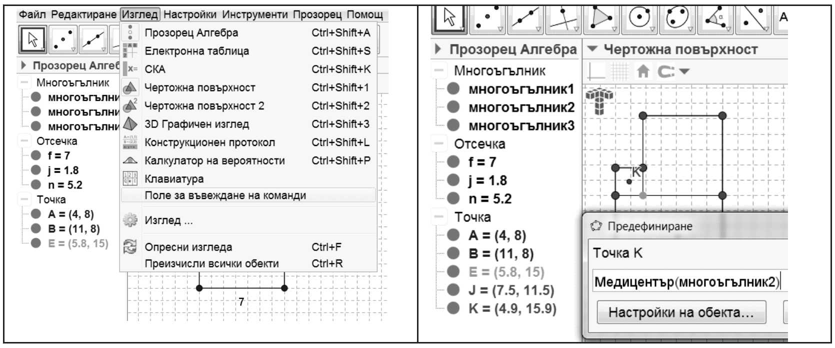
От гледна точка на симетрията можеше да се очаква, че минимумът ще се постигне в средата или в край на разглежданата отсечка.

От 267 участници 35,6% са се справили с точност под 1 с решаването на задачата.

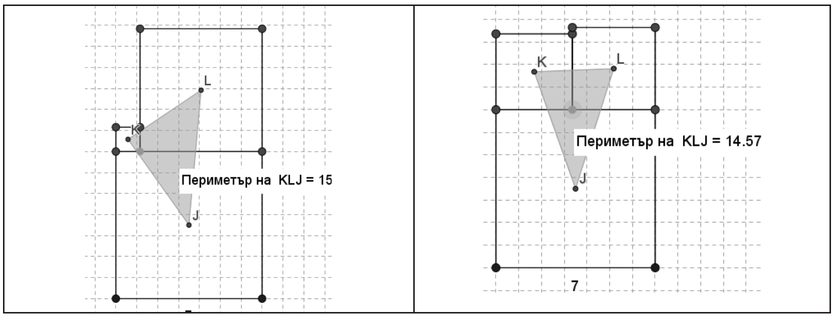
В [6], [7], [8], [9] и [10] могат да се намерят още примери за използване на файлове при решаване на задачи от онлайн състезания „VIVA Математика с компютър“ и „Тема на месеца“. От Виртуалния училищен кабинет по математика свободно могат да се използват файлове, видео материали, теми, включително темите от миналите издания на разглежданото тук онлайн състезание.

Заключение. Учениците, които вече са участвали в състезанието (един или

[1] В динамичния файл точките са оцветени (бел. ред.)



Фиг. 10. Построяване на център на квадрат чрез команда



Фиг. 11. Изследване с динамична конструкция

повече пъти), се справят по-добре със задачите от онези, които участват за пръв път. По-добре се справят и учениците на учители, които системно използват новите технологии и разработваните с тях инструменти и образователни среди при формалното или неформалното математическо образование.

Участниците в състезанието придобиват и първоначални навици за учене чрез изследване. Много от тях усещат, че кръгът от задачи, които могат да се решават със задоволителна точност още на училищно равнище (с помощта на системи като *GeoGebra*), е много голям и обхваща възникващи от практиката проблеми. Това има потенциал да промени в положителна посока негативните нагласи към образованието по математика и към математиката въобще.

ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Кендеров, Т. Чехларова. Състезание *Математика с компютър и изследователски подход в образованието по математика*, 2016, 128 с.

[2] J. Hohenwarter, M. Hohenwarter, Z. Lavicza. Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: the Case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, **28**, *2* (2009), 135–146.

[3] G. Gachev. Online system for assessing of mathematical knowledge. In: UNESCO

International Workshop: Quality of Educa-tion and Challenges in a Digitally NetworkedWorld (eds E. Kovatcheva, E. Sendova). Za Bukvite, O'Pismeneh, Sofia, 2015, 117–122

[4] П. Кендеров, Т. Чехларова. Подготовка за състезания по математика с компютър в 9.–10. клас. Регалия 6, 2020, 32 с.

[5] Т. Чехларова, П. Кендеров. Подготовка за състезания по математика с компютър в 5.–6. клас. Регалия 6, 2020, 32 с.

[6] P. Kenderov, T. Chehlarova, E. Sendova. A mathematical theme of the month – a web-based platform for developing multiple key competences in exploratory style. *Mathematics Today*, **51**, *6* (2015), 305–309.

[7] П. Кендеров, Т. Чехларова. Състезанието „Viva Математика с компютър" и ролята му за развитие на дигиталната компетентност на учениците. Шумен, МАТТЕХ, 2014, 3–10.

[8] T. Chehlarova, P. Kenderov. Mathematics with a computer – a contest enhancing the digital and mathematical competences of the students. In: UNESCO International Workshop: Quality of Education and Challenges in a Digitally Networked World (eds E. Kovatcheva, E. Sendova), Za Bukvite, O'Pismeneh, Sofia, 2015, 50–62.

[9] P. Kenderov. Powering Knowledge Versus Pouring Facts. In: Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education. (eds G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, B. Xu) ICME-13 Monographs, Springer, Cham, 2018, 289–306.

[10] Т. Чехларова. Подготовка на обучители за внедряване на изследователския подход в училищното образование по математика. Пловдив, Макрос 2000, 2017.

Петър Кендеров
e-mails: kenderovp@cc.bas.bg, vorednek@gmail.com
Тони Чехларова
e-mail: toni.chehlarova@gmail.com
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. „Акад. Г. Бончев", бл. 8
1113 София, България

THE USE OF AUXILIARY FILES IN THE ONLINE COMPETITION "VIVA MATHEMATICS WITH A COMPUTER"

Petar Kenderov, Toni Chehlarova

The object of a paper is one of the specifics of the online competition "VIVA Mathematics with a Computer", having been organized since 2014 by the Institute of Mathematics and Informatics at the Bulgarian Academy of Sciences, the Union of Bulgarian Mathematicians and the telecommunication company VIVACOM. The problems given at this competition are often accompanied by auxiliary GeoGebra files, which help the participants to better understand and solve the problem. The article shows, on the base of some examples, how these files contribute to the simultaneous development of both the digital and mathematical competence of students. These files are also a handy tool for promoting among students, teachers, and parents the importance of educational resources based on specialized dynamic software.