МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

МОДЕЛИ НА ЗЛАТНИ ПРАВОЪГЪЛНИЦИ*

Тони Чехларова

Представени са компютърни модели на златен правоъгълник, разработени с динамичен софтуер *GeoGebra*. Те са предоставени със свободен достъп във Виртуалния училищен кабинет по математика, разработван в Института по математика и информатика при БАН http://cabinet.bg/. Част от тях са предназначени за организиране на изследователска работа за достигане до златен правоъгълник и формулиране на негови свойства. Други са за самопроверка и развитие на окомера. На моделите за построяване на златен правоъгълник гледаме като на инструменти, които могат да се използват и като добавена реалност.

Въведение. Златното сечение е една от трите забележителни константи в математиката – Архимедова константа (Лудолфовото число) π, Неперовото число (Ойлеровото число) e и златното сечение (Божествената пропорция) φ. От тези три константи в учебното съдържание по математика най-малко е използвана третата. Златното сечение е число, представящо отношението на две части a и b, за които е изпълнено $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}$.

Дигиталните ресурси позволяват лесно да се организира изследователска работа по преоткриване на закономерности, свързани със златното сечение. Мотивираща включването на съдържание със златно сечение в училищното математическо образование е възможността за приложение на знанията в различни области, включително с използване на добавена реалност, лесното организиране на самопроверка и развитие на окомера с атрактивни обекти.

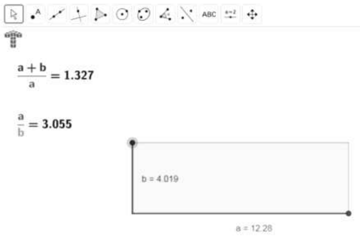
Една от златните фигури е златният правоъгълник. Правоъгълник, на който отношението на страните е златното сечение, ще наричаме *златен правоъгълник*.

Тук представяме компютърни модели на златен правоъгълник, разработени с динамичен софтуер *GeoGebra* [1].

Модели за откриване на златен правоъгълник. Страните на правоъгълника на фиг. 1 се променят чрез преместване на два от върховете му `http://cabinet.bg/content/bg/html/d15106.html`. На екрана са изведени стойностите на двете отношения, които са определящи за златния правоъгълник. При промяна на правоъгълника стремежът е двете отношения да са равни.

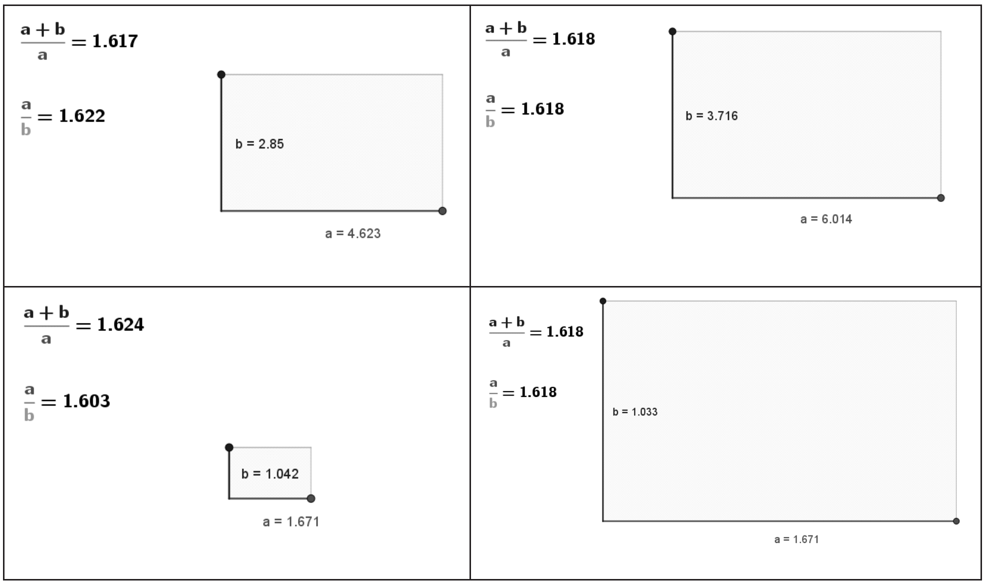
*Изследването е реализирано с подкрепата на Националната научна програма „Информационни и комуникационни технологии за единен цифров пазар в науката, образованието и сигурността (ИКТвНОС)“, финансирана от МОН.

Ключови думи: златно сечение, златен правоъгълник, компютърен модел, динамичен софтуер, изследователски подход, окомер.



Фиг. 1. Модел за откриване на златен правоъгълник

На фиг. 2 са показани няколко решения с различна точност. В последния случай е използван бутон *zoom*, за да се подобри точността.

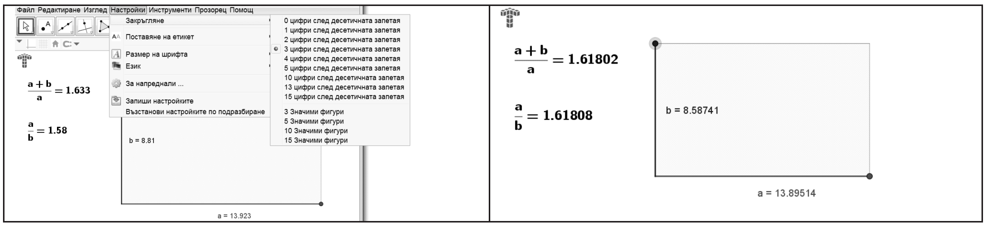


Фиг. 2. Приближения на златни правоъгълници

За увеличаване на точността може да се промени настройката на файла, например да се показват пет знака след десетичната запетая.

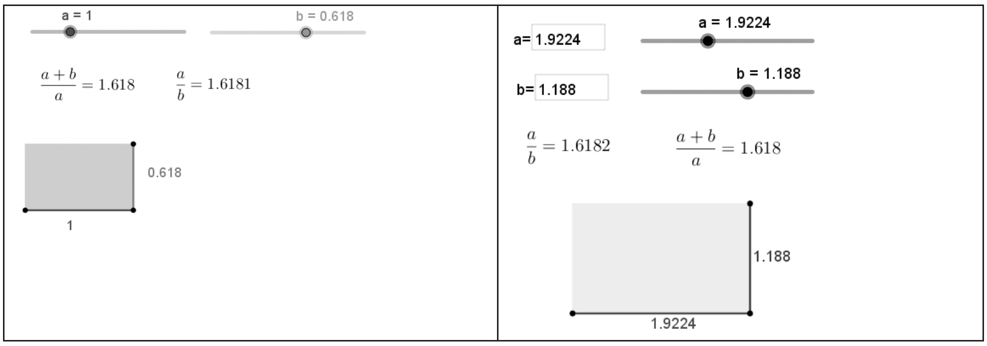
При създаване на този модел единият връх на правоъгълника е в началото на координатната система, вторият връх е точка от абсцисната ос, а третият – точка от ординатната ос.

На втория кръг на онлайн състезанието „VIVA Математика с компютър“ [2] бе предоставен разглежданият файл като придружаващ задачата „За страните a и b на правоъгълник е изпълнено равенството $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}$. Намерете отношението $\dfrac{a}{b}$. Запишете с точност до стотните.“ Всички участници са се ориентирали и използвали адекватно файла.



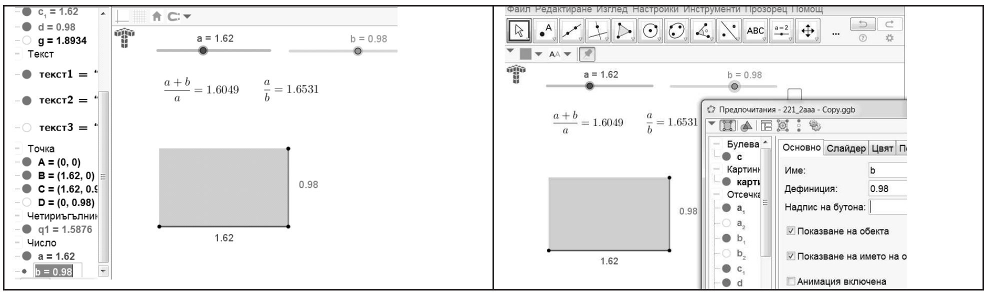
Фиг. 3. Подобряване на точността с увеличаване на знаците след десетичната запетая

Използването на параметри за двете измерения на правоъгълника дава възможност за управлението му чрез въвеждане на конкретни числа, което обикновено води до по-бързо постигане на резултат (фиг. 4).



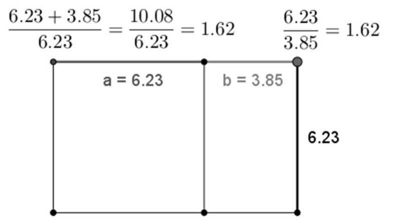
Фиг. 4. Подобряване на точността чрез въвеждане на параметър

За параметрите a и b се използват два плъзгача, като в единия файл е предоставена възможност за въвеждане и чрез „поле за въвеждане“. Разбира се, може да се използват и други варианти за промяна на стойността на параметъра, например в алгебричния прозорец или чрез настройки.



Фиг. 5. Промяна на стойността на параметъра

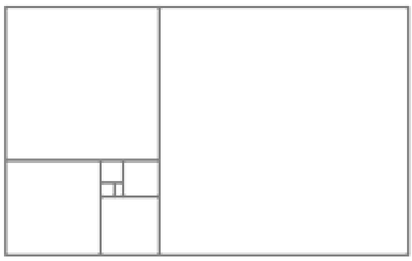
Модел за откриване на свойство на златния правоъгълник. Моделът на фиг. 6 е удобен за преоткриване на свойство, позволяващо получаването на златен правоъгълник от друг златен правоъгълник чрез отстраняването на квадрат. За няколко конкретни златни правоъгълника може да се наблюдава, че след изрязване от всеки от тях на квадрат със страна, равна на малката му страна, останалата част е отново златен правоъгълник.



Фиг. 6. Модел за откриване на свойство на златен правоъгълник

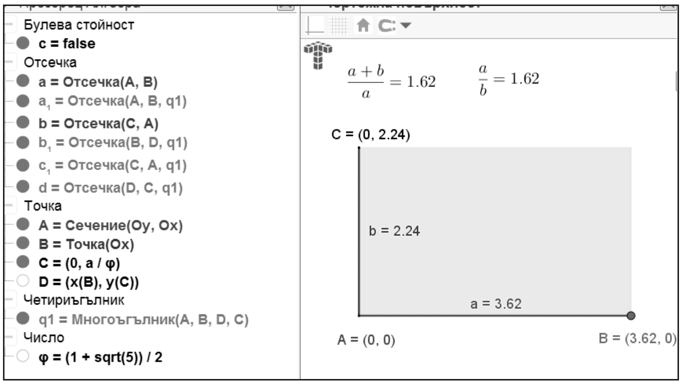
Модел на златен правоъгълник от хартия е подходящ за демонстриране на откритото свойство.

Модел за преброяване на златни правоъгълници. В модела на фиг. 7 е приложено няколкократно получаването на златен правоъгълник от златен правоъгълник чрез изрязване на квадрат. В резултат се получава редица от намаляващи златни правоъгълници. От друга страна, забелязваме, че даденият правоъгълник се покрива с нееднакви квадрати, т.е може да се разглежда като съвършен квадрируем правоъгълник [3]. Този модел е подходящ за задача за преброяване на златни правоъгълници, както и за получаване на спирала в златен правоъгълник.



Фиг. 7. Задача за преброяване на златни правоъгълници

Модели за построяване на златен правоъгълник. Ако се използва фактът, че златното сечение $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, то дължините на правоъгълника ще са в следната зависимост: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, където a е по-голямата страна на правоъгълника. Нека единият връх на правоъгълника е $A(0,0)$. Ако върхът B е точка от абсцисната ос, тогава дължината на едната страна на правоъгълника е равна на абсцисата на точката B, т.е. $a = x(B)$, а $C(0,\, x(B)/\varphi)$.

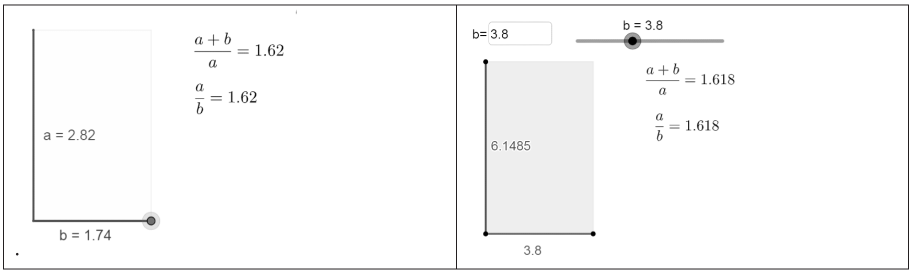


Фиг. 8. Построяване на златен правоъгълник

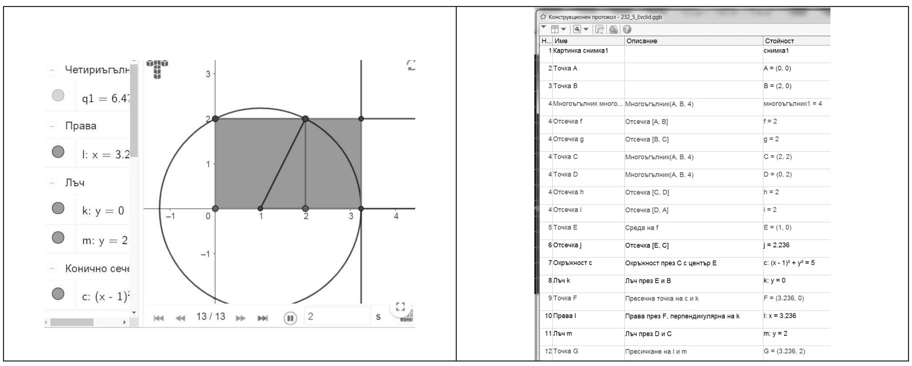
И тук, както в моделите за откриване на златно сечение, може да се използва параметър-плъзгач. В два от моделите на адрес

`http://cabinet.bg/index.php?contenttype=viewarticle&id=232`

по-дългата страна на правоълника е зависима от по-късата (фиг. 9).



Фиг. 9. Модел за построяване на златен правоъгълник, ако е дадена по-малката му страна



Фиг. 10. Построяване на златен правоъгълник по идея от „Елементи“ на Евклид

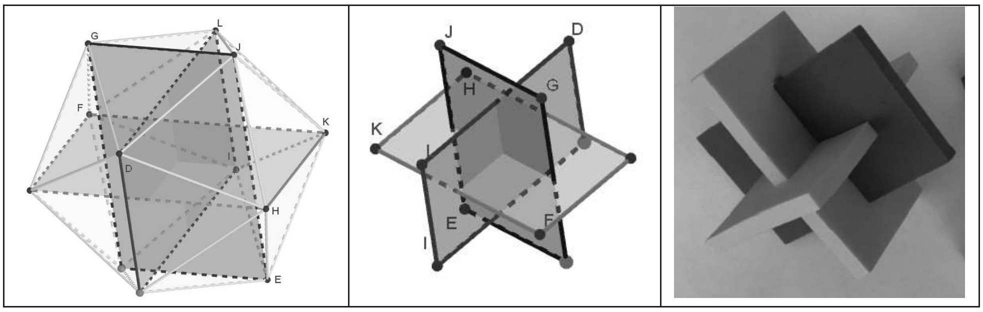
В следващия модел е използван алгоритъмът за построяване на златно сечение по книга II на „Елементи“ на Евклид [4]
`http://cabinet.bg/index.php?contenttype=viewarticle&id=221`.

Могат да се наблюдават стъпките, включително и конструкционният протокол.

Златни правоъгълници чрез икосаедър. Лесно е построяването на златен правоъгълник при наличие на икосаедър. Файлът на адрес

`http://cabinet.bg/content/bg/html/d15145.html`

може да се използва и за изследване. Последната снимка на фиг. 11 е на пъзел от три златни правоъгълника, с които се създава модел на икосаедър, т.е. за решаване на обратната задача.



Фиг. 11. Златни правоъгълници в икосаедъра

Може да се използва и додекаедърът за построяване на златен правоъгълник. Двете тела – икосаедър и додекаедър са дуални. Ако при икосаедъра използваме негови върхове за построяване на златен павоъгълнк, то при додекаедъра ще използваме центрове на негови стени.

Развитие на окомера със златен правоъгълник. В темата „Окомер със златен правоъгълник“

(`http://cabinet.bg/index.php?contenttype=viewarticle&id=255`)

файловете са за развитие на окомера чрез задачи за получаване на златен правоъгълник. Някои от примерите са със самостоятелно създаване на следващ пример, а други – с генериране по случаен начин.

Във Виртуалния училищен кабинет по математика (`http://cabinet.bg/`) има модели за визуализация на безкрайността на процеса на генериране на златни правоъгълници от златен правоъгълник, както и модел за използване на златен правоъгълник и на спирала в златен правоъгълник за изследване на художествени произведения [5].

Заключение. В училище „Златен правоъгълник“ може да се разглежда като самостоятелна тема. Отделни елементи са походящи за включване в час по математика или по информационни технологии: в 6. клас – при изучаване на пропорции; в 7. клас – при построителни задачи; в 8. клас – при реални числа и решаване на системи, в 10. клас – стереометрия. Златният правоъгълник е една от златните фигури и представените тук модели са включени в съдържанието на квалификационен курс за учители по темата [6].

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Hohenwarter, M. Hohenwarter, Z. Lavicza. Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: the Case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, **28**, *2* (2009), 135–146.
[2] П. Кендеров, Т. Чехларова. Състезание Математика с компютър и изследователски подход в образованието по математика. София, Макрос, 2016, 128 с.
[3] М. Гарднер. Математически развлечения. т.1. София, Наука и изкуство, 1977.
[4] O. Byrne. The First Six Books of the Elements of Euclid. TASCHEN GembH, 2017.
[5] E. Sendova, T. Chehlarova. Studying fine-art compositions by means of dynamic geometry constructions. Scientia iuvenis, Book of Scientific Papers, Scientific guarantee: prof. RNDr. Łjubomír Zelenický, CSc. Slovak Republic, Constantine the Philosopher University in Nitra, 2013, 495–502.
[6] Т. Чехларова. Сборник от работни листове „Златни фигури“. София, Макрос, 2020.

Тони Чехларова
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8
1113 София, България
e-mail: toni.chehlarova@gmail.com

MODELS OF GOLDEN RECTANGLES

Toni Chehlarova

Golden Rectangular computer models developed with dynamic GeoGebra software are presented. They are freely accessible at the Virtual Mathematics Laboratory, developed at the Institute of Mathematics and Informatics at BAS (http://cabinet.bg/). Some of them are designed to organize research to reach a gold rectangle and formulate its properties. Others are for self-examination and the development of eyeball estimation skills. We look at golden rectangle models as tools that can also be used as augmented reality.

Key words: golden section, golden rectangle, computer model, dynamic software, research approach, estimation by sight