МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2021
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2021
Proceedings of the Fiftieth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2021

ОТНОСНО РАЗБИРАНЕТО В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

Добринка Бойкина

В статията се анализират основни схващания за разбирането в обучението по математика, като се акцентува на ролята му при изграждане на идеи за решаване на задачи. Представят се илюстриращи примери на неговата реализация при конкретни задачи.

В студията [12, с. 34–36], разглеждайки схематичния модел в [2, с. 12], който представя системата категории: „възприемане“, „разбиране“, „осмисляне“, „запомняне“, „рефлексия“, „приложение“ и „овладяване“, и анализирайки го не само от гледна точка на рефлексивния подход, но и на синергетичните процеси, ние откроихме и мястото на самоорганизацията в системата от когнитивните процеси, предхождащи приложението и овладяването на знанията, както и не по-малко важния процес (на мегаравнище) – бъдещи приложения на овладените знания при решаване на съответни проблеми. В резултат на всичко това ние обогатихме модела на М. Георгиева и в цитираната по-горе студия [12, с. 36], разработихме нов схематичен модел, където са откроени местата на рефлексията и самоорганизацията, а също и последователността на посочените когнитивни процеси, предхождащи овладяването на знанията и уменията и техните приложения. Този модел тук няма да представяме, поради ограничения обем на статията. Ще отбележим обаче, че в резултат на анализ на представените връзки между отделните компоненти, ние правим извод, че:

– разбирането и осмислянето (както и възприемането, и запомнянето) могат да се осъществяват и без рефлексия;

– рефлексията се реализира чрез разбирането и осмислянето;

– рефлексията е „в основата на приложението и овладяването, във формирането на рефлексивни способности“ [2, с. 12].

Ще отбележим, че новото в модела от [12] се изразява в това, че компонентите възприемане, запомняне, осмисляне и разбиране *се вписват в самоорганизацията*, тъй като на съответния етап от обучението субектите могат да достигнат до съответна самоактуализация и саморазвитие. Освен това овладяването не само се предхожда от компонента приложения, но и води до *бъдещи приложения* за решаване на проблеми с нестандартен характер. От казаното се вижда, че *разбирането* е съществен компонент на учебния процес и е важна част от мисловните компетентности на всеки човек.

На проблема за разбирането в обучението са посветени редица изследвания (Д. Пойа [9], В. Крутецкий [6], А. Хинчин [11], Л. Портев, Н. Николов [10], Л. Десев [4], Р. Маврова, П. Петров [7], Р. Маврова, Д. Бойкина [8], С. Ангелова [1], Д. Димова [5] и др.).

В проучванията, особено от последните десетилетия, се посочва, че „учебната среда и различните стилове на учене влияят върху концептуалното разбиране в обучението. Учебната среда трябва да изпълнява моделираща функция по отношение на планирането, организацията и управлението на дейността на учениците. Едно възможно решение за организация на дейността на ученика е ученето да се „разположи" в реална обстановка, като се интегрира в учебна задача" [1, с. 82].

Отнесено към обучението по математика, това схващане обхваща, както разбирането на съответните математически понятия, обекти и релации, връзките и отношенията между тях, така и разбирането на процеса *решаване на математически или практически задачи.* Затова разбирането на учебния материал, с оглед неговото включване в цялостна система от асоциации и установяване на вътрешнопредметни и междупредметни връзки, се явява важен компонент на усвояването. Трябва да се отбележи обаче, че в това отношение „значителна трудност за учениците представлява установяването на причинно-следствени връзки и зависимости, което се обяснява, от една страна, с това, че даже простите зависимости от този род често не са едностранни (единствена причина – едно следствие), а многостранни (една причина има много следствия или едно следствие може да бъде породено от много причини). От друга страна, тези трудности са свързани с това, че причинно-следствените връзки често не се възприемат по пътя на простото наблюдение, а се разкриват посредством (задълбочено – *добавено от мен, Д. Б.*) мислене." [6, с. 155].

При ученето се налага съзнателно усвояване на изучаваното учебно съдържание. За целта в процеса на обучението ученикът трябва сам да набележи опорните точки в разглеждания учебен материал. Важно е изучаваният предмет да бъде обхванат с неговите взаимовръзки и идеи, а това означава да се осмисли и разбере този материал, защото разбраното винаги по-лесно се запомня. Изборът на подходящи прийоми и средства за обяснение на учебното съдържание от учителя осигурява неговото разбиране и усвояване от учениците.

Разбирането означава още: „свързване на непознатото учебно съдържание с известното, включване на нещо в системата от налични, вече изградени асоциации, в структурата на мисловната дейност; установяване на връзки между различни области на знанието, между обекти и знания за тях. То е процес на извличане смисъла (тълкуване, формиране и операционализиране на смисъла) и проникване на семантиката на даден учебен материал" [4, с. 415].

Р. Маврова и П. Петров разглеждат разбирането в качеството на „компонент на мисленето като обобщено опосредствано отражение на съществени свойства, връзки, отношения. Разбирането на междинните резултати от мисловната дейност е предпоставка за активизиране на мисленето. От друга страна, разбирането се постига чрез разгръщане на мисленето. В този смисъл те взаимно се обуславят" [7, с. 35].

Според Д. Димова „разбирането означава, че осъзнаваме смисъла; разбирането означава превод, интерпретация и екстраполация на знанието с цел неговото преобразуване, структуриране и систематизиране." [5, с. 97].

Разбирането е свързано с успешно реализиране на дидактическия принцип за съзнателност по отношение на съдържанието. „Разбирането на учебното съдържание се изразява в това ученикът да може да го възпроизведе със свои думи, с променени означения и чертежи, да знае на какви теореми, аксиоми и определения се основава проведеното доказателство, да може да прилага знанията в сходни условия“ [8, с. 21]. Затова разбирането оказва силно влияние върху мисловната дейност при целенасоченото учене. „Разбирането може да се осигури чрез:

– преобразуване на учебния материал от една сфера в друга;

– интерпретация на учебния материал;

– прогнози за развитие на явления и събития;

– преразказ на информация със свои думи;

– търсене и обяснение на примери, потвърждаващи факти, събития, явления;

– разпределяне на информацията по групи;

– извеждане на общи характеристики, признаци и т.н.

– анализ на информация, представена в някаква форма и представяне на изводи;

– провеждане на сравнителен анализ на явления и процеси;

– използване на диаграми, схеми за представяне на информация и т.н.“[5, с. 98–99].

Разбирането е свързано и с аналитико-синтетична дейност, насочена към усвояване на готова информация. Такава информация ученикът може да получи от учителя, учебника, справочната литература. Заслужава да се отбележи, че начинът на представяне на тази информация от учителя е от съществено значение за правилното ѝ разбиране от учениците, защото разбирането на учебния материал от тях се явява предпоставка за самостоятелно решаване на познавателните задачи, които им се поставят. Разбирането означава още успешно свързване на новото, непознатото учебно съдържание с по-рано изученото и усвоено знание. То е процес на проникване в семантиката на даден учебен материал. При разбирането става доосмисляне и усвояване на наготово съобщени факти и новополучена информация, докато чрез мисленето се достига до ново знание, нови изводи.

Съществено влияние на разбирането на новия учебен материал оказват начинът, по който учителят въвежда учениците в темата, обосноваването на необходимостта от изучаване на ново учебно съдържание, изявяването на негови връзки с други знания от училищния курс (не само по математика) и с живота. Майсторството на учителя се изразява и в това умело да съчетава дедуктивни и индуктивни методи на познание. Разбира се, изборът на методи на познание зависи и от самия учебен материал. Много пъти в обучението учителят се отказва да използва индуктивните пътища на познание, което поражда формализъм в знанията на учениците. Както посочва А. Я. Хинчин, „знания, които не се опират на наблюдение и опит, са откъснати от живота“ [11, с. 107].

Средство, чрез което учителят установява дали ученикът е разбрал определено учебно съдържание, е поставянето на въпроси от учителя. Отговорите на учениците показват до каква степен е разбрано учебното съдържание. Още Р. Декарт в публикациите „Правила за ръководство на ума“ от 1628 г. и „Разсъждения за метода“ от 1637 г. [3] дава съвет на всеки, който се стреми да познае истината, че той трябва да се научи да поставя въпроси, при това въпросите да са ясни, еднозначно определящи отговора и изискващи мислене. Затова въпросите, които задава учителят на учениците, трябва да са такива, че да изискват от тях прилагане на различни методи на познание: сравняване, анализиране, синтезиране, обобщение, издигане на хипотези и тяхното обосноваване или опровергаване. Иначе казано, ученикът да откроява характерни особености на разглежданото понятие или обект, в резултат на което, използвайки методите на познание, да издига идеи и да разсъждава критично върху тях. Например, вместо учителят да поставя въпроси като следните: „Кога два ъгъла са съседни?“; „Какво е симетрала на отсечка?“, при които отговорите са свързани само с възпроизвеждане на съответните определения, по-подходящо е той да постави съответно следните въпроси: „Вярно ли е, че два ъгъла са съседни, ако едното рамо на единия ъгъл е противопосочно на едното рамо на другия ъгъл?“, „Вярно ли е, че всяка права, която минава през средата на една отсечка е симетрала на тази отсечка?“

По такъв начин отговорите например на последния въпрос изискват критично отношение към възникналата проблемна ситуация, мислено възпроизвеждане на определението за симетрала на отсечка и сравняване на това определение със зададената ситуация. Така не само се получава верният отговор на поставения въпрос, но учениците осмислят важната роля на съюза „и“ в определението и разбират, че видовият признак в това определение се състои от два компонента – правата трябва да минава през средата на отсечката и да е перпендикулярна на нея. При всеки отговор (утвърдителен или отрицателен) на конкретния поставен въпрос е важно той да бъде обоснован, като се използват усвоените знания, а също чрез посочване на подходящи примери или контрапримери. Така например, при изясняване на въпроса за съседни ъгли е уместно да се посочи чрез контрапример, че не е достатъчно да е налице само условието „едното рамо на единия ъгъл да е противопосочно на едното рамо на другия“, за да бъдат те съседни.

Ще отбележим, че към поставяните въпроси има определени изисквания – те да създават условия ученикът сам да извършва анализ, синтез, да построява индуктивни и дедуктивни умозаключения, да издига идеи и хипотези и т.н. За съжаление учениците не познават законите на логиката, поради което не могат да ги използват при извършване на съответни разсъждения. Практиката показва, че за осмисляне поне на логическите съюзи „и“ и „или“ е достатъчно учениците да разберат, че ако едно съждение е образувано от други две съждения с помощта на съюза „и“, то разглежданото съждение е вярно точно тогава, когато са верни едновременно и двете съставящи го съждения. Ако пък двете съждения са свързани със съюза „или“, то новото съждение е вярно, когато поне едното от тези съставящи го съждения е вярно.

В обучението по математика има примери, при които разсъжденията протичат по правилото на отрицанието, което, записано символично, изглежда така: $\dfrac{p \to q,\ \bar{q}}{\bar{p}}$, където p и q са съжденията, означаващи съответно условието и заключението на някоя теорема, а $\bar{p}$ и $\bar{q}$ – съответните техни отрицания. За илюстрация ще посочим един елементарен пример от училищния курс по математика с приложение на това правило.

Пример 1. Правилно ли е извършено делението: 1455:4=303?

Разсъжденията за установяване на правилността или неправилността протичат по следния начин: „Ако правилно е извършено делението, то трябва да е вярно равенството $303.4 = 1455$. Но $303.4 \neq 1455$. Следователно, съгласно правилото на отрицанието, може да се направи извод, че делението не е извършено правилно“.

Този начин на разсъждение подготвя учениците за по-лесно разбиране на същността на метода на отрицанието (косвено доказателство). За правилното усвояване на умозаключение, получено чрез прилагане на правилото на отрицанието спомагат и подходящо подбраните и зададени въпроси от учителя. Това може да се осъществи чрез използване на метода на обучение – беседа (и то евристична беседа).

Разбирането е свързано с аналитико-синтетична дейност и тогава, когато тя е насочена към изграждане на идеи за извършване на различни действия. Така например, изборът на рационална идея и съответен метод за решаване на дадена задача винаги се предшества от анализ. Не случайно Д. Пойа разглежда разбирането като първи и основен етап в своя модел на процеса решаване на задача [9]. Разсъжденията на учениците са от вида: „Ако постъпя така, то ще се получи това ... и това ..., а ако е по друг начин, то .... Коя от идеите е по-подходяща, по-рационална?“ Въз основа на проведен анализ на конкретна поставена задача се избира подходящ метод за решаване и се съставя план за неговото изпълнение.

Пример 2. Решете неравенството $x - \dfrac{x-3}{5} + \dfrac{2x-1}{10} < 4$.

В резултат на анализиране на неравенството (то не съдържа неизвестно в знаменателите си и поради това е ясно, че те са положителни), може да се избере идеята за еквивалентно преобразуване, т.е. да се приложи методът на еквивалентност:

$$\frac{10x - 2(x-3) + (2x-1)}{10} < 4 \quad \Leftrightarrow \quad 10x - 2(x-3) + 2x - 1 < 40 \quad \Leftrightarrow$$

$$10x - 2x + 6 + 2x - 1 < 40 \quad \Leftrightarrow \quad 10x < 35 \quad \Leftrightarrow \quad x < 3{,}5.$$

При колективно провеждане на анализа с учениците може да се достигне и до друга идея за решаване на неравенството – извършване на почленно делене числителя на знаменателя. Тази идея води до по-кратко решение на задачата, а именно:

$$x - \frac{x-3}{5} + \frac{2x-1}{10} < 4 \;\Leftrightarrow\; x - \frac{x}{5} + \frac{3}{5} + \frac{x}{5} - \frac{1}{10} < 4 \quad \Leftrightarrow \quad x < 3{,}5.$$

Разгледаният пример показва колко е важна ролята на анализа за откриване на рационална идея за решаване на задачата.

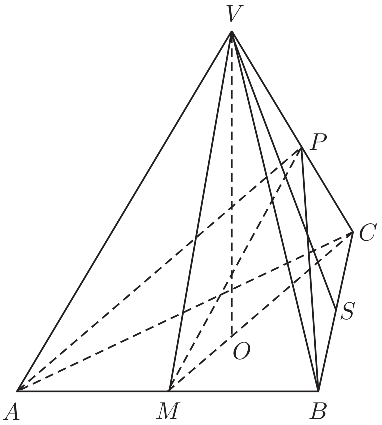
Освен при формирането на нови знания въпросите имат съществено значение и при изграждане на идеи за решаване на задачи. Въпросите, които се поставят пред учениците, са: „Какви операции предстои да се извършат? Как може да се извършат? Защо може така? Може ли по друг начин? Защо може и по този начин? Кой от начините е по-рационален?“ [10, с. 46]. При геометрични задачи могат да бъдат поставяни и въпроси като следните: „Какви свойства притежава разглежданата фигура?“, „Какво специално е дадено в нея?“, „Какви допълнителни построения могат да се направят?“, Защо, с каква цел?“, „Може ли по друг начин да се разположи фигурата?“, „Ще окаже ли това влияние на решението?“, „Обосновано ли е решението (с кои определения, теореми, аксиоми)?“ и др. (7, с. 35-36). Такива въпроси трябва да си задава и самият ученик при решаването на задачи, защото така по същество се реализира принципът за съзнателност – ученикът разбира решението на една конкретна задача, ако може, проявявайки критичност на мисленето, вярно и обосновано да отговори на горните въпроси.

Пример 3. Ще покажем реализация, в практически план, на посочените по-горе мнения относно разбирането и осмислянето на условието на следната стереометрична задача, за която ще разгледаме и различни идеи за откриване на решения.

Задача. Правилна триъгълна пирамида има основен ръб 6 cm и околен ръб 10 cm. Да се намери дължината на оста-отсечка на кой да е основен и кръстосания с него околен ръб.

Решение. При разбирането на условието на задачата и на търсеното в нея е характерно, че трябва да се извлече, да се припомни доста информация. Така например, за направата на достоверен и нагледен чертеж са нужни знания за кабинетна проекция, кои са видимите и невидимите елементи на пирамидата, къде се проектира върхът на пирамидата върху равнината на основата ѝ; що е ос-отсечка на две кръстосани прави (в случая на два кръстосани ръба на пирамидата) и др.

Така, за да се построи оста-отсечка например на кръстосаните ръбове AB и VC, трябва да се вземе пред вид определението ѝ – тя е отсечка, перпендикулярна на двата кръстосани ръба и нейните краища лежат върху тях. За целта през основния ръб AB на правилната триъгълна пирамида $ABCV$ се построява равнина $\alpha \perp VC$. Нека P е пресечната им точка, т.е. $\alpha \cap VC = P$ (фиг. 1). Тогава $VC \perp \alpha$ и VC е перпендикулярна на всички прави от равнината α, в частност $VC \perp AP$, $VC \perp BP$, $VC \perp MP$, където M е среда на AB. Щом пирамидата е правилна, то всичките ѝ околни стени са еднакви триъгълници и съответните им елементи са равни. Следователно $AP = BP$ (като височини към VC в $\triangle ACV \cong \triangle BCV$), т.е. $\triangle ABP$ е равнобедрен. Затова медианата му PM е и височина, т.е. $PM \perp AB$. Освен това е изпълнено и $PM \perp VC$. Следователно търсената ос-отсечка на кръстосаните ръбове AB и VC е отсечката MP.



Фиг. 1

Дотук проведените разсъждения са свързани с разбирането на задачата (фиг. 1), направа на чертежа и достигане до идеи за решаване.

I идея: За да се пресметне дължината на MP, се приравняват изразите за лицето на $\triangle VMC$, определени по два различни начина $\frac{1}{2}MC.VO = \frac{1}{2}VC.MP$, откъдето се изразява

$$MP = \frac{MC.VO}{VC}. \tag{1}$$

Понеже ортогоналната проекция на върха V на правилната пирамида върху основата ABC е центърът O на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, то от правоъгълния $\triangle VOC$ се изразява

$$VO = \sqrt{VC^2 - OC^2}. \tag{2}$$

По условие $VC = 10$ см, а от формулата, която представя връзката на страната на правилния триъгълник и радиуса R на описаната около него окръжност, се изчислява $OC = R = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ cm. Тогава, чрез заместване в (2), се изчислява $VO = \sqrt{10^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{22}$ cm.

Остава да се намери медианата MC в равностранния $\triangle ABC$, което може да се извърши, като се приложат различни знания (теорема на Питагор или тригонометрични функции в правоъгълния $\triangle BMC$). Така се получава

$$MC = BC.\sin 60^\circ = 6\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Тогава от (1) се намира и дължината на търсената ос-отсечка

$$MP = \frac{3\sqrt{3}.2\sqrt{22}}{10} = \frac{3}{5}\sqrt{66} \text{ cm}.$$

Задачата е решена по I идея.

II идея: От правоъгълния $\triangle BMP$, като се приложи Питагоровата теорема, се изразява $MP = \sqrt{BP^2 - MB^2}$, където $MB = \frac{1}{2}AB =3$ cm, BP е височина в $\triangle BCV$, която може да се пресметне, като се изрази лицето му по два начина $\frac{1}{2}BC.VS = \frac{1}{2}VC.BP \quad \Rightarrow \quad BP = \frac{BC.VS}{VC}$, където VS е апотема в стената BCV на пирамидата и $VS = \sqrt{VC^2 - SC^2}$.

III идея: От $\triangle MPC \sim \triangle VOC$ (правоъгълни с общ ъгъл при C) следва, че $\frac{MP}{VO} = \frac{MC}{VC}$, откъдето се намира $MP = \frac{VO.MC}{VC}$. Тук VO и MC се изчисляват както при I идея.

IV идея: Изразяване на някоя тригонометрична функция на MCV от двата правоъгълни триъгълника $\triangle MPC$ и $\triangle VOC$. Така от $\sin \sphericalangle MCP = \frac{MP}{MC}$ и $\sin \sphericalangle OCV = \frac{VO}{VC}$ следва, че $\frac{MP}{MC} = \frac{VO}{VC}$, откъдето $MP = \frac{MC.VO}{VC}$, където $MC = 3\sqrt{3}$, $VO = 2\sqrt{22}$ и $VC = 10$.

При решаването на тази задача по четирите начина са приложени различни знания. При I идея са използвани представяне на лице на триъгълник по различни начини и Питагоровата теорема. При II идея – Питагоровата теорема и пресмятане на височината BP по различни начини. При III идея – подобни триъгълници, откъдето се намира дължината на оста-отсечка MP; при IV идея – тригонометрични функции на остър ъгъл в правоъгълни триъгълници.

Като се анализират тези идеи за решаване на задачата, може да се направи извод, че вероятно най-рационална е третата идея, тъй като при нея се използват само четири задачи-компоненти – знание за подобни триъгълници и директно пресмятане на дължините на MC, OC и VO, чрез които лесно се определя дължината на отсечката MP.

Разбира се, при реализацията на всяка от изложените идеи е задължително да се включат и разсъжденията, чрез които се осъществява ***разбирането*** на условието (даденото) и търсеното в задачата и да се ***обоснове*** построяването на оста-отсечна на двата кръстосани ръба на дадената пирамида.

В заключение ще посочим, че в резултат на активната познавателна дейност на ученика, решаващ задачи, разбирането се проявява като обобщено и опосредствано отражение на съществени свойства, връзки, отношения на разглежданите математически обекти и релации. На базата на практическия си опит ще отбележим още, че създаването на ефективна учебна среда, като необходимост и предпоставка за постигане на качество и оптималност на обучението, предполага изискването ученикът да бъде поставен в центъра на процеса на обучение – ученето да се превърне в активен процес, при който учещият конструира дефиниции на понятия, формулира твърдения, издига хипотези, предлага идеи на базата на наличните си знания и минал опит. Целта е дейността на ученика, включително и по формирането на умения за решаване на задачи, да се превърне в процес на активно търсене и откриване на идеи и смисъл в обучението, т.е. ученето да бъде „имплантирано“, в определена учебна среда.

Една добра възможност за изграждане на подходяща учебна среда, в която да се реализира ефективно разбиране от учениците на учебното съдържание по математика, включително и на дейността решаване на задачи, е създаването на условия за осъществяване на учебно-познавателна евристична дейност от учениците в процеса на решаване на математически задачи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Ангелова. Разбирането като концептуална основа за формиране на умения – резултати от едно изследване. *Science & Technologies*, Vol. **III**, Number 8, Education, (2013), 81–85.

[2] М. Георгиева. Рефлексията в обучението по математика (V–VI клас). В. Търново, Фабер, 2001.

[3] Р. Декарт. Избрани философски произведения. София, Наука и изкуство, 1978.

[4] Л. Десев. Педагогическа психология. София, Аскони-издат, 1996.

[5] Д. Димова. Опит за разбиране на разбирането. (Методологически и методически аспекти в областта на природонаучното образование). *Стратегии на образователната и научната политика. Рефлексия и обучение*, т. **XXIV**, кн. 1, (2016), НИОН „Аз Буки“, 92–108.

[6] В. А. Крутецкий. Психология обучения и воспитания школьников. Книга для учителей и классных руководителей, Москва, Просвещение, 1976.

[7] Р. Маврова, П. Петров. Разбирането на учебното съдържание по математика – предпоставка за активизиране мисленето на учениците. *Науч. труд. ПУ „Паисий Хилендарски„*, т. **39**, кн. 2 – Методика на обучението, (2002), 33–40.

[8] Р. Маврова, Д. Бойкина. Актуални проблеми на методиката на обучението по математика – активност, самостоятелност, творчество. УИ „Паисий Хилендарски“ , Пловдив, 2012.

[9] Д. Пойа. Как да се решава задача. София, Народна просвета, 1972.

[10] Л. Портев, Н. Николов. Методика на обучението по математика. Пловдив, 1987.

[11] А. Я. Хинчин. Педагогические статьи: Вопросы преподавания математики, 2-е изд., Москва, КомКнига, 2006.

[12] D. Millousheva-Boikina, V. Milloushev. Methodology for Mastering Methods for Solving Mathematical Problems.– In: Conceptual Framework for Improving the Mathematical Training of Young People (Ed. N. Tarasenkova). Monograph, Budapest, Hungary: SCASPEE, 2016, 31–79.

Добринка Бойкина
Факултет по математика и информатика
Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“
ул. „Цар Асен“ № 24
4000 Пловдив, България
e-mail: boikina@uni-plovdiv.bg

ABOUT UNDERSTANDING IN MATHEMATICS EDUCATION

Dobrinka Boykina

Basic concepts of understanding in mathematics education are analyzed in the article. The emphasis is placed on the role of understanding in creating ideas for solving problems. Illustrative examples of its implementation in specific problems are presented.